УДК 372. 016: 51(075.8)

ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОКРЕСТНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ-АНАЛОГОВ

Менькова С.В.

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», Арзамасский филиал, Арзамас, Россия (607220, ул.К.Маркса, 36), svetlana.menckova@yandex.ru

Под окрестностью математической задачи понимают набор связанных с ней задач. В данной статье рассмотрен один из видов окрестностей математических задач: окрестность задач-аналогов. Автором уточняется сущность понятий «аналогичная математическая задача» и «математическая задача-аналог». Под «аналогичной математической задачей» и «математической задачей-аналогом» понимают задачи, имеющие черты сходства в компонентах структуры и аналогию в методе решения. В статье предложена уровневая модель построения окрестности математической задачи. Охарактеризованы особенности уровней окрестностей математических задач-аналогов: уровень задач-клонов, уровень однотипных задач из одной темы, уровень задач-аналогов из разных тем, сводящихся к одной обобщенной модели; уровень внутрипредметных задач-аналогов; уровень межпредметных задач-аналогов. Приведены примеры, иллюстрирующие особенности задач-аналогов, принадлежащих разным уровням окрестности.

Ключевые слова: аналогичная математическая задача, задача-аналог, окрестность задач, варьирование задачи

DESIGN FEATURES OF THE NEIGHBORHOODS OF MATHEMATICAL TASKS – ANALOGUES

Menkova S.V.

Arzamas Branch of Nizhny Novgorod State University, Arzamas, Russia (607220, K.Marx, 36), svetlana.menckova@yandex.ru

The neighborhood of mathematical tasks-analogues - is a set of related tasks. Under «tasks- analogues» we understand the tasks, with the similarities in the structure and components of the tasks and similarity in the method of solution. The paper proposes a level model for building a neighborhood of the mathematical task. The features of the following levels of neighborhood mathematical tasks analogues: task level clones, the level of similar tasks of the same theme, the level of the tasks from all those that can be reduced to a generalized model; intrasubject level tasks analogues; level of interdisciplinary tasks peers. Examples are given to illustrate the features of tasks-analogues belonging to different levels of the neighborhood.

Key words: " tasks- analogues ", neighborhood of mathematical tasks, variation of the task.

Каждая математическая задача имеет набор связанных с ней задач. Пользуясь терминологией Г.В. Дорофеева [2], будем называть этот набор окрестностью. Каждая задача входит в некоторый букет окрестностей, связанных с той или иной её особенностью: это могут быть особенности содержания, схожесть сюжета или метода рассуждений, единый круг используемых понятий и др. Разнообразие букета окрестностей задачи предопределяет широту ее использования и является критерием ее дидактической ценности. В данной статье рассматривается один из видов окрестностей математических задач: окрестности задач-аналогов.

Цель исследования: уточнить сущность понятий «аналогичная математическая задача», «математическая задача-аналог» охарактеризовать особенности конструирования окрестностей математических задач-аналогов.

В научных и методических статьях по теории и методике обучения математике, в учебных и дидактических пособиях по математике довольно часто встречаются словосочетания «аналогичная задача» и «задача-аналог». При этом авторы не всегда уточняют, какие же именно математические задачи следует считать аналогичными или аналогами.

Чтобы определить сущность этих понятий, сначала отметим, что под аналогией вообще принято понимать сходство нетождественных объектов в некоторых сторонах, качествах, отношениях. Говорят, что сложный объект X аналогичен сложному объекту Y относительно набора S характеристик, если в наборе S найдется хотя бы одна характеристика, общая для X и Y. При характеристике такого сложного объекта как математическая задача будем опираться на исследования Ю.М. Колягина, который выделяет в структуре задачи следующие компоненты: A – начальное состояние (условие задачи); B – конечное состояние (требование), R – способ преобразования условия задачи для нахождения искомого, C – базис решения (теоретическое обоснование решения) [6]. Тогда, казалось бы, оправдано задачами-аналогами или аналогичными задачами называть задачи, имеющие черты сходства в любом компоненте их структуры.

Каждый математик понимает, что визуальное сходство между условиями задач не всегда означает их подлинную общность и возможность решения единым способом, т. е. внешне похожие, на первый взгляд, аналогичные задачи, могут иметь принципиальные различия в решении [7]. Закономерен вопрос: следует ли называть задачами-аналогами задачи, имеющие черты сходства только в условии (т. е. только внешнее сходство)?

Если проанализировать употребление словосочетания «аналогичная задача» в дидактической и методической литературе, в практике обучения математике, то можно заметить, что, как правило, оно используется именно в случаях, когда идет речь о задачах, которые решаются аналогично, т. е. имеют аналогию в решении. Поскольку чаще всего аналогии в задачах ищут с целью применить тот же метод или ту же идею решения.

Кстати, именно такое понимание «задач-аналогов» встречается в теории решения изобретательских задач. Задачами-аналогами в ТРИЗ называют изобретательские задачи, относящиеся к различным областям деятельности, но имеющие сходные технические и физические противоречия и способы их разрешения. Таким образом, внешнего сходства в условии задач может и не наблюдаться. Определяющим является аналогия в методе решения.

Придерживаясь мнения большинства исследователей и учителей-практиков «аналогичными математическими задачами», «математическими задачами-аналогами», будем называть задачи, имеющие черты сходства в компонентах структуры и аналогию в методе решения.

Следует заметить, что аналогия в компонентах структуры задач не всегда может быть заметна школьнику, поскольку умение видеть аналогию зависит и от суммы знаний, и от способности комбинировать, связывать знания по-новому.

Чтобы подчеркнуть, в чем проявляется аналогия в математических задачах, используют различные термины, например: внешняя аналогия (сходство в условии) и внутренняя аналогия (сходство математического аппарата). О.П. Зеленяк, анализируя геометрические задачи, пишет о существовании задач, аналогичных по рассматриваемым в них геометрическим объектам, и задач, аналогичных по методу решения [5].

Связующим элементом задач, образующих окрестность задач-аналогов, является сходство в методе, способе решения. Степень аналогии может быть различной. В контексте нашего исследования это означает, что в окрестности математической задачи существуют как близкие аналоги – практически не отличающиеся, идентичные задачи, так и достаточно далекие – настолько далекие, что заметить существование аналогии сможет только ученый-математик.

При описании окрестностей математических задач для характеристики степени близости или удаленности задач-аналогов от исходной задачи условно выделим уровни окрестностей.

Так, будем считать, что задачи-аналоги, идентичные исходной задаче, образуют нулевой уровень окрестности (условный термин «нулевой» подчеркивает отсутствие существенных различий у задач данного уровня). Такие задачи называют задачами-клонами, эти задачи, одинаковые по сложности, способу решения, теоретическому базису, равноценные или близкие по трудности, и отличающиеся друг от друга числовыми данными, обозначениями, расположением объектов, наименованием нематематических объектов задачи [9]. Различия условий задач-клонов не касается характера взаимосвязей, отношений между величинами, объектами, заданными в условии.

Следующий уровень – первый – образуют задачи, однотипные с данной. Все задачи первого уровня окрестности объединены одной учебной темой. Различия между задачами-аналогами на этом уровне гораздо заметнее, чем между задачами-клонами. Задачи этого уровня могут отличаться по сложности (например, в случае, когда расширяется требование, например, за счет включения дополнительных требований или замены более сильным, и исходная задача будет являться подзадачей); они могут отличаться по уровню трудности (например, иметь менее привычную для учеников формулировку). Среди задач данного уровня окрестности могут быть и обращенные задачи, в которых структура задач изменена достаточно существенно, когда условие и требование меняются местами.

На втором уровне окрестности аналогия проводится между задачами разных тем, но в пределах одного учебного предмета. Это может быть аналогия на уровне обобщенной модели. Составить задачи данного уровня можно, применив прием обобщения исходной задачи, а затем использовать прием конкретизации.

На третьем уровне аналогия проводится между задачами из разных учебных предметов, но внутри одной образовательной области «математика», в частности: между планиметрией и геометрией, между алгеброй и геометрией и т.д. Такие задачи подчеркивают единство математики как науки, позволяют формировать внутрипредметные связи. Способ решения задачи, находящейся на таком (достаточно большом) удалении от исходной (на третьем уровне), может быть уже не полностью идентичен способу решения исходной задачи, однако аналогичен ему.

Четвертый уровень окрестностей задачи – уровень межпредметных связей и аналогий между математикой и другими науками. Такие далекие взаимосвязи, конечно, можно наблюдать далеко не у каждой математической задачи, да и замечать и осознавать их посильно не каждому.

Проиллюстрируем вышесказанное на примерах.

Исходная задача 1. $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0$.

Приведем примеры задач нескольких уровней ее окрестности.

Задачи-аналоги (нулевой уровень) (клоны):

1)$1_{(0)}$ $4^{2x} - 5\cdot 4^x + 4 = 0$; 3) $1_{(0)}$ $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0$;

2) $1_{(0)}$ $3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0$; 4) $1_{(0)}$ $7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 = 0$.

Задачи-клоны получены путем варьирования числовых данных, одинаковые по трудности (все уравнения сводятся к приведенному квадратному уравнению, корни у всех уравнений - целые числа).

Задачи-аналоги (первый уровень). Однотипные задачи, которые решаются тем же способом, что и исходная.

1)$1_{(1)}$ $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$; 3)$1_{(1)}$ $5^{3x+1} + 34\cdot 5^{2x} - 7\cdot 5^x = 0$;

2)$1_{(1)}$ $2^x - 2 = 15\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$; 4)$1_{(1)}$ $6\cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 6 = 0$.

Задачи-аналоги (второй уровень). Сводятся к одной обобщенной модели, в частности в данном примере – к квадратному уравнению.

1)$1_{(2)}$ $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)^2-12=0$; 3)$1_{(2)}$ $\log_9^2 x-5\log_3 x+21=0$;

2)$1_{(2)}$ $8\sin^2 x - 6\sin x - 5=0$; 4)$1_{(2)}$ $x^2-3x-5\sqrt{x^2-3x}+4=0$.

(обозначения $1_{(2)}$ –задача второго уровня окрестности первой задачи).

Можно привести немало примеров задач-аналогов из курса планиметрии и стереометрии. Вот один из них.

Исходная задача 2. ABCD – прямоугольник со сторонами 3см и 4 см. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC.

Задача $2_{(3)}$ третьего уровня окрестности. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро куба равно 1. Найдите расстояние от вершины B_1 куба до плоскости BA_1C_1.

Первая задача может быть решена с помощью метода площадей. Вторая задача может быть решена методом объемов, который, по сути, является аналогом метода площадей.

Умение составлять окрестности математических задач – необходимое профессиональное умение учителя математики, поэтому при обучении студентов следует целенаправленно формировать у них умения применять различные приемы варьирования математических задач, с помощью которых получаются новые задачи, в частности, задачи-аналоги [8], [10], [1], которые образуют окрестность задач-аналогов.

Чрезвычайно важно целенаправленно формировать у учеников умение видеть и находить задачи-аналоги. С этой целью следует предлагать ученикам задания самим подобрать или составить задачи-аналоги, и самостоятельно сконструировать некоторую окрестность задачи.

Работа выполнена в рамках Федерального задания Минобрнауки России «Видовое многообразие задачных конструкций продуктивного обучения математике» (регистрационный номер 01201458168)

Список литературы

1. Алексеева С.В. Углубленное изучение курса геометрии 8-9 классов средней школы на основе внутриклассной дифференциации: Дис. ... канд. пед. наук. – Арзамас, 1998. – 250 с.

2. Дорофеев Г. В. О составлении циклов взаимосвязанных задач// Математика в школе. – 1983. - № 6. — С. 34–39.

3. Зайкин М.И., Арюткина С.В., Зайкин Р.М. Цепочки, циклы и системы математических задач: Монография / Под общей ред. М.И. Зайкина, Арзамасский филиал ННГУ. – Арзамас: АГПИ, 2013. – 135с.

4. Зайкин М.И., Егулемова Н.Н., Абрамова О.М. Серии, вариации и окрестности математических задач: Монография / Под общей ред. М.И. Зайкина, Арзамасский филиал ННГУ. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2014. – 149с.

5. Зеленяк О.П. Задачи разные – идеи решения схожие// Математика в школе. – 2008. - №8. – С. 34-40.

6. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.I. – М.: Просвещение, 1977. – 110 с.

7. Крачковский С.М. Смысловые и визуальные сходства и различия некоторых математических задач // Математика в школе. – 2012. - №5. – С. 23-34.

8. Ковалева Г.И. Теория и методика обучения математике: конструирование систем задач / Г.И. Ковалева, Н.А. Астахова, Т.Ю. Дюмина. – Волгоград: Изд-во ВГПУ «Перемена», 2008. – 156 с.

9. Менькова С.В. Математические «задачи-клоны»: сущность, дидактические функции, приемы составления // Современные проблемы науки и образования. – 2014. - № 4; URL: www.science-education.ru/118-13861.

10. Пойа Д. Как решать задачу / Гл. ред. Ю.М. Леви. – Львов: Журнал «Квантор», 1991. – 215 с.

Рецензенты:

Фролов И.В., д.п.н., профессор, и.о. заведующего кафедрой физико-математического образования Арзамасского филиала ННГУ, г. Арзамас;

Вострокнутов И.Е., д.п.н., профессор кафедры физико-математического образования Арзамасского филиала ННГУ, г. Арзамас