

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЕ

Бобров В.Н.<sup>1</sup>, Корчагин В.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФКОУ ВПО «Воронежский институт ФСИН России», Воронеж, Россия (394072, Воронеж, ул. Иркутская, 1 «а»), e-mail: vifsin@mail.ru

---

В статье рассматривается влияние приземного слоя атмосферы, расположенного непосредственно у земной поверхности, на горизонтальную траекторию оптического сигнала. Известно, что на траекторию распространения оптического сигнала оказывают влияние физические свойства поверхности и ее геометрическая форма. В реальной атмосфере происходят сложные пространственно-временные изменения показателя преломления атмосферы, которые количественно могут быть охарактеризованы через вертикальный и горизонтальный градиент показателя преломления атмосферы. Основной особенностью данного исследования является учёт только горизонтального градиента показателя преломления атмосферы и послойное деление атмосферы, причем эти слои располагаются перпендикулярно к земной поверхности. Получены и теоретически обоснованы новые математические выражения для расчета отклонений траектории оптического сигнала и величины угла рефракции атмосферы при прохождении им приземного слоя атмосферы в горизонтальном направлении. Предлагается учитывать фактические значения горизонтального градиента показателя преломления для расчета возможных отклонений траектории оптического сигнала от прямолинейной.

---

Ключевые слова: оптический сигнал, горизонтальный градиент, показатель преломления.

## MATHEMATICAL REGULARITIES OF RANDOM PHENOMENA MODELS IN GRADIENT MEDIA

Bobrov V.N.<sup>1</sup>, Korchagin V.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Voronezh Institute of the Russian Federal Penitentiary Service, Voronezh, Russia (394072, Voronezh, street Irkutskay 1-a.), vifsin@mail.ru

---

The article examines the impact of the atmospheric boundary layer, which is located directly at the earth's surface, on a horizontal path of the optical signal. It is known that the trajectory of the optical signal is influenced by the physical properties of the surface and its geometric shape. In the real atmosphere, there are complex spatial - temporal changes in the refractive index of the atmosphere, which can be quantitatively described by the vertical and the horizontal gradient of the refractive index of the atmosphere. The main feature of this study is the inclusion of only the horizontal gradient of the refractive index of the atmosphere and the layer-division of the atmosphere, and these layers are arranged perpendicular to the earth's surface. New mathematical expressions for calculating the deviation of the trajectory of the optical signal and the angle of refraction of the atmosphere upon passing through the atmospheric boundary layer in the horizontal direction are received and theoretically justified. It is proposed to take into account the actual value of the horizontal gradient of the refractive index for the calculation of the possible deviations of the optical signal path from a straight line.

---

Keywords: the optical signal, horizontal gradient refractive index.

Законы распространения электромагнитных волн в свободном пространстве сравнительно просты, но чаще всего радиотехника имеет дело не со свободным пространством, а с распространением электромагнитных волн над земной поверхностью. Как показывает и опыт и теория, поверхность Земли сильно влияет на распространение электромагнитных волн, причем сказываются как физические свойства поверхности (например, различия между свойствами атмосферы над морем и сушей), так и ее геометрическая форма (общая кривизна поверхности земного шара и отдельные неровности

рельефа). Влияние это различно для волн разной длины и для разных расстояний между передатчиком и приемником [7].

Состав атмосферы Земли представляет собой смесь взаимодействующих друг с другом компонентов. Соотношения между концентрацией этих компонентов постоянно меняется, что приводит к разнообразию ситуаций. Основные особенности структуры атмосферы отражены в ее послойном делении. Атмосфера представляется состоящей из концентрических сферических оболочек с различными физическими свойствами [4, 6, 7].

В реальной атмосфере вследствие изменений температуры, давления и влажности происходят сложные пространственно–временные изменения показателя преломления. Различают сезонные и суточные изменения показателя преломления в атмосфере, а также случайные изменения, обусловленные атмосферной турбулентностью. Сезонные изменения обусловлены, главным образом, годовым ходом влажности с максимумом в теплое полугодие. Наибольшие изменения показателя преломления имеют место в нижнем слое атмосферы, что обусловлено большими изменениями в этом слое температуры и влажности. Суточные изменения показателя преломления атмосферы наиболее значительны у слоя атмосферы расположенного у земной поверхности [1-5].

Они также обусловлены значительной амплитудой суточного хода метеорологических величин - температуры и влажности воздуха. Количественной мерой таких изменений в пространстве служит градиенты этих величин [6, 8].

В практике обычно учитывают изменения показателя преломления атмосферы только по высоте, пренебрегая горизонтальной изменчивостью [1, 3-5].

**Цель работы** – рассмотрение влияния горизонтального градиента показателя преломления на горизонтальную траекторию оптического сигнала.

**Материалы исследований.** Известно, что под градиентом ( $grad f$ ) величины  $f$  понимают вектор, который по направлению совпадает с нормалью  $N$  к эквискалярной поверхности, а по модулю равен производной от  $f$  по  $N$  с обратным знаком [8]:

$$|gradf| = -\frac{df}{dN}, \quad (1)$$

Наибольший практический интерес представляют горизонтальная и вертикальная проекция  $grad f$ :

$$grad_n f = -\frac{\partial f}{\partial n}, \quad grad_z f = -\frac{\partial f}{\partial z}, \quad (2)$$

где  $n$  – нормаль к изолиниям величины  $f$  на уровенной поверхности (в частности к изобарам или изотермам).

На практике при расчете градиентов истинные производные от метеорологических величин заменяют отношением конечных разностей, т. е. полагают

$$-\frac{\partial f}{\partial N} = -\frac{\Delta f}{\Delta N}, \quad -\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\Delta f}{\Delta n}, \quad -\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

Из курса физики известно, что при прохождении оптического сигнала границы раздела двух сред с различными значениями показателя преломления наблюдается отклонение траектории от прямолинейной [10].

С практической точки зрения представляется интересным рассмотрение влияния горизонтальных градиентов метеорологических величин на траекторию горизонтального оптического сигнала в условиях градиентной атмосферы. Неоднородности гидрометеорологических параметров атмосферы, обусловленные неоднородностью земной поверхности, вызывают изменения преломляющих свойств атмосферы.

В качестве комплексной характеристики атмосферы в исследовании был использован показатель преломления атмосферы, расчёт которого осуществляется по известному соотношению:

$$n = 1 + 10^{-6} N = 1 + 10^{-6} \left[ \frac{77,6}{p} \left( p + 4810 \frac{e}{T} \right) \right], \quad (3)$$

где  $T$  – температура воздуха ( $K$ ),  $e$  – парциальное давление водяного пара ( $z/m^3$ ),  $p$  – атмосферное давление ( $mб$ ) [6, 8].

Представим атмосферу как совокупность слоев с различными значениями показателя преломления ( $n_0, n_1, \dots, n_i$ ), расположенными перпендикулярно земной поверхности (плоскость  $XOY$ ), причем  $n_0 < n_i$ . В данной постановке задачи структура атмосферы графически может быть представлена как на рис. 1.

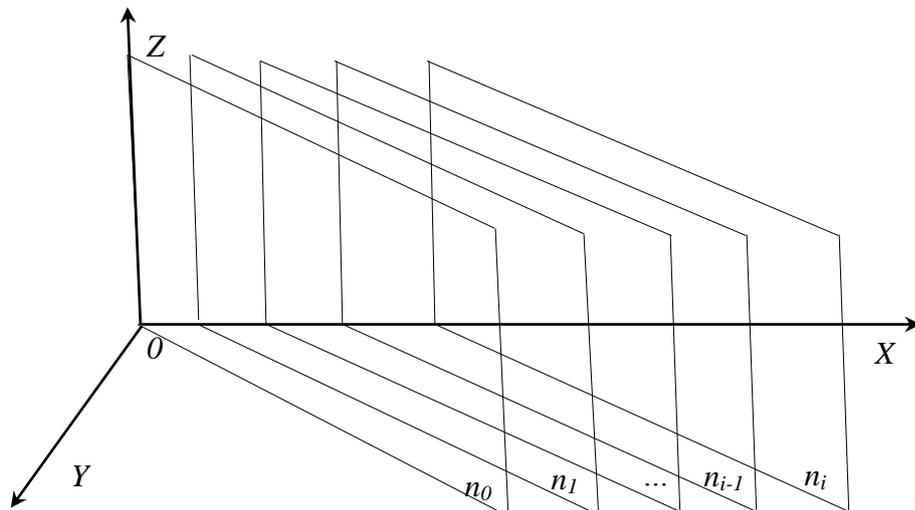


Рис. 1. Структура атмосферы

Пусть оптический сигнал распространяется относительно земной поверхности горизонтально в направлении  $OA$  под углом  $\xi_0$  к границе раздела двух соседних слоев с показателями преломления  $n_0$  и  $n_1$  соответственно, рис. 2.

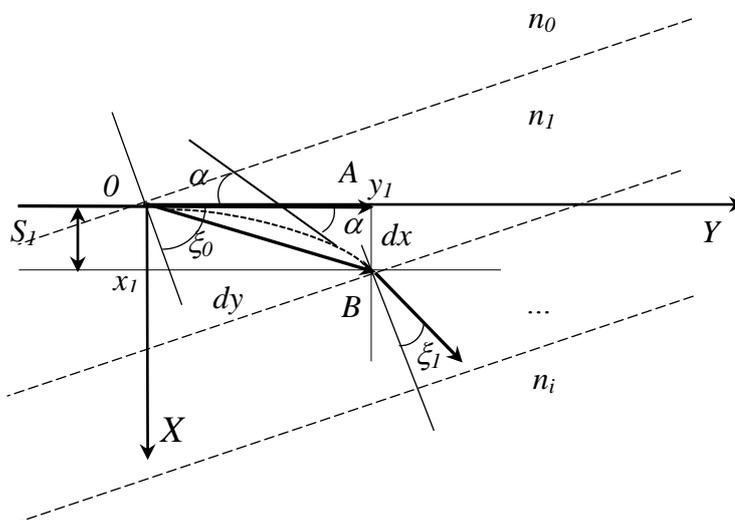


Рис. 2. Траектория оптического сигнала

Тогда на границе раздела соседних слоев выполняется известное соотношение:

$$n_0 \sin \xi_0 = n_1 \sin \xi_1, \quad (4)$$

где  $n_0, n_1$  – показатели преломления на границе раздела соседних слоев;  $\xi_0, \xi_1$  – угол падения и преломленный угол зондирующего оптического сигнала относительно нормали на границе раздела двух соседних слоев с показателями преломления  $n_0$  и  $n_1$  соответственно [10].

Продифференцируем (4) по  $y$ , получим

$$0 = \frac{dn}{dy} \sin \xi_1 + n_1 \cos \xi_1 \frac{d\xi}{dy},$$

$$\frac{d\xi}{dy} = -\frac{dn}{dy} \cdot \frac{1}{n_1} \operatorname{tg} \xi_1, \quad (5)$$

Так как

$$\operatorname{tg} \xi_1 = \frac{\sin \xi_0}{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2} - \sin^2 \xi_0}}, \quad dy = \operatorname{tg} \xi_1 dx, \quad \operatorname{tg} \xi_1 = \frac{dy}{dx}. \quad (6)$$

Преобразуем (5) используя (6) к следующему виду:

$$\frac{d\xi}{dy} = -\frac{dn}{dx} \cdot \frac{1}{n_1},$$

$$d\xi = -\frac{dn}{dx} \cdot \frac{1}{n_1} dy = -\frac{dn}{dx} \cdot \frac{1}{n_1} \operatorname{tg} \xi_1 dx. \quad (7)$$

Поскольку угол рефракции  $\alpha$  определяется, как  $\xi_0 - \xi_1 = \alpha$ , то выражение для определения величины угла рефракции можно записать в следующем виде:

$$\xi_0 - \xi_1 = \alpha = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi = -\int_0^{x_1} \frac{1}{n_1} \cdot \frac{dn}{dx} \cdot \frac{\sin \xi_0}{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2} - \sin^2 \xi_0}} dx.$$

Величину преломленного угла  $\xi_1$  можно определить как:

$$\xi_1 = \xi_0 - \int_0^{x_1} \frac{dn}{dx} \cdot \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\sin \xi_0}{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2} - \sin^2 \xi_0}} dx. \quad (8)$$

Определим АВ – величину отклонения траектории оптического сигнала в направлении ОА (см. рис. 2). Так как  $dx = AB$  и из (4)  $dx = dy / \operatorname{tg} \xi_0$ , то окончательно можем получить:

$$S_1 = \int_0^{x_1} dx = \int_0^{y_1} \frac{1}{\operatorname{tg} \xi_1} dy = \int_0^{y_1} \frac{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2} - \sin^2 \xi_0}}{\sin \xi_0} dy. \quad (9)$$

Полученное выражение позволяет произвести расчет отклонения траектории оптического сигнала от прямолинейной при распространении последнего в направлении ОА (см. рис. 2).

Проведя дальнейшие преобразования полученных выражений (8) и (9) в общем виде будем иметь:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_{i-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dn}{dx} \cdot \frac{1}{n_i} \cdot \frac{\sin \xi_{i-1}}{\sqrt{\frac{n(x)^2}{n_{i-1}^2} - \sin^2 \xi_{i-1}}} dx = \\ &= \xi_{i-1} - \cos \xi_{i-1} \cdot \ln \left[ \frac{1 - \sin \xi_{i-1}}{1 + \frac{\Gamma_{i-1} x_i}{n_{i-1}} + \sqrt{\left(1 + \frac{\Gamma_{i-1} x_i}{n_{i-1}}\right)^2 - \cos^2 \xi_{i-1}}} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Gamma_{i-1} = \frac{n_i - n_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  – горизонтальный градиент показателя преломления.

$$\begin{aligned} S_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{1}{\operatorname{tg} \xi_i} dy = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\sqrt{\frac{n(x)^2}{n_{i-1}^2} - \sin^2 \xi_{i-1}}}{\sin \xi_{i-1}} dy = \\ &= \frac{n_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \cos \xi_{i-1} \cdot \ln \left[ \frac{1 + \frac{\Gamma_{i-1} x_i}{n_{i-1}} + \sqrt{\left(1 + \frac{\Gamma_{i-1} x_i}{n_{i-1}}\right)^2 - \cos^2 \xi_{i-1}}}{1 + \sin^2 \xi_{i-1}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

**Заключение.** Полученные выражения (10) и (11) позволяют решать практические задачи, где имеет место прохождение горизонтального оптического сигнала в слое градиентной атмосферы. Учет горизонтального градиента показателя преломления атмосферы позволит рассчитать величину возможных ошибок, вызванных отклонениями траектории оптического сигнала (рис. 2) от прямолинейной.

### Список литературы

1. Бобров В.Н. Информационная модель прохождения оптического сигнала на наклонной трассе в приземном слое атмосферы // Проектирование и технология электронных средств. – 2012. - №4. – С. 12-14.

2. Бобров В.Н. Информационная система представления информации о фактическом состоянии окружающей среды // Фундаментальные исследования. – 2013. - №11-5. – С. 861-865.
3. Бобров В.Н. Учет информационных ресурсов градиентной атмосферы при проектировании электронных средств контроля // Проектирование и технология электронных средств. – 2013. - №2. – С. 51-54.
4. Бобров В.Н., Нахмансон Г.С. О сезонном и суточном изменении вертикального профиля показателя преломления атмосферы в приземном слое // Метеорология и гидрология. – 2002. - №12. – С. 36-39.
5. Бобров В.Н., Ус Н.А. Устройство для определения загрязнения окисью углерода приземного слоя атмосферы автотранспортными средствами // Патент России № 2255361. 2005. Бюл. № 18.
6. Казаков Л.Я., Ломакин А.Н. Неоднородности коэффициента преломления воздуха в тропосфере. – М.: Наука, 1976. – 165 с.
7. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики: Учеб. Пособие. В 3т./под ред Г.С. Ландсберга: Т.3. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика. – 12-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000г. – 656 с.
8. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. – СПб.: Гидрометеиздат, 2000. – 778 с.
9. Ус Н.А., Бобров В.Н. Методика оптического контроля антропогенных веществ при управлении экологической безопасностью промышленных объектов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2006. – Т. 2. - №4. – С. 16-19.
10. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики. Том III. Оптика, атомная физика. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. – 800 с.

**Рецензенты:**

Душин А.В., д.т.н., доцент, начальник кафедры управления и информационно-технического обеспечения, ФКОУ ВПО «Воронежский институт ФСИН России», г. Воронеж;

Ирхин В.П., д.т.н., доцент, профессор кафедры основ радиотехники, ФКОУ ВПО «Воронежский институт ФСИН России», г. Воронеж.