

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМАССОВЫХ БАЛОК С НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВНЕЗАПНОМУ УДАЛЕНИЮ СВЯЗИ, МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ

Талантов И.С.¹

¹ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», Санкт-Петербург, Россия (190005, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4), e-mail: i.talantov@yandex.ru

В работе рассмотрен один из подходов к решению задачи о свободных физически нелинейных колебаниях, спровоцированных внезапным изъятием из системы связи. Приведены результаты расчета методом малого параметра Пуанкаре для однопролетной шарнирно опертой балки, несущей одну сосредоточенную массу. Записаны аналитические решения уравнений колебаний и круговых частот при задании нелинейной упругой характеристики балки полиномами 3-й и 5-й степени. Приведен алгоритм решения задачи на внезапное удаление связи из системы с учетом физической нелинейности методом малого параметра Пуанкаре. Сделаны выводы о целесообразности использования представленного подхода к расширению границ применимости метода оценки усилий в элементах, подверженных внезапному удалению связей.

Ключевые слова: нелинейные колебания, внезапное удаление элементов, прогрессирующее обрушение, малый параметр Пуанкаре, метод возмущений.

SOLVING OF VIBRATIONS PROBLEM IN SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM BARS WITH NON-LINEAR ELASTIC RESPONSE UNDER SUDDEN BOND LOST USING POINCARÉ SMALL PARAMETER METHOD

Talantov I.S.¹

¹Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russia (190005, Saint-Petersburg, 2-nd Krasnoarmeiskaya St, 4), e-mail: amrnijad@mail.ru

One of approaches to a problem of non-linear vibrations initiated by sudden bond loss is expressed. Some results of the calculation using Poincare small parameter method for a hinged girder with one dynamical degree of freedom introduced. Analytical solution for vibrations and angular velocities when non-linear elastic response is set by cubic and quintic polynomial orders are given. Solution algorithm for a problem of sudden bond loss with a glance of non-linear elastic response is introduced. Conclusions about reasonability of usage of introduced approach for extending the applicability of the method of stresses calculation in elements under sudden bond lost are made.

Keywords: non-linear vibrations, sudden element loss, progressive collapse, Poincare small parameter, perturbation method.

Сторонники подхода к рассмотрению поведения стержневых систем, подверженных внезапному удалению связей как совершающих свободные колебания с начальными условиями, сталкиваются, в первую очередь, с очень жесткими границами применимости этого метода, вызванными физическими характеристиками материала несущих конструкций. Действительно, в подавляющем большинстве реально существующих конструкций, не рассчитанных на сопротивление каким-либо экстремальным воздействиям, запас прочности стремится к минимуму, следовательно, при внезапном изъятии из системы связи, усилия в соседних элементах после перераспределения почти наверняка превысят предел упругости. Как следствие, необходимо рассматривать уже нелинейные колебания, в которых

восстанавливающие силы помимо времени зависят и от обобщенной координаты. Настоящая статья посвящена поиску аналитического решения задачи о свободных поперечных колебаниях балки, несущей сосредоточенную массу, упругая характеристика которой близка к низкоуглеродистой стали.

Задание упругой характеристики

В качестве выражения, описывающего упругие свойства материала, примем полином n -ой степени вида[5]:

$$F(x) = A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 + E \cdot x^4 + G \cdot x^5 + \dots + N \cdot x^n \quad (1)$$

Для стали, одинаково работающей на растяжение и сжатие вид графика будет симметричным относительно нуля, а коэффициенты полинома при неизвестных в четной степени ничтожно малы по сравнению с коэффициентами при степенях 1, 3, 5... Таким образом, выражение упругой характеристики принимает вид:

$$F(x) = A + B \cdot x + D \cdot x^3 + G \cdot x^5 + \dots + N \cdot x^n \quad (2)$$

В качестве примера ниже представим диаграмму растяжения–сжатия стали (рис.2), заданную в виде линейного графика ($\sigma_l(x)$) и двух полиномов 3–й ($\sigma_3(x)$) и 5–й ($\sigma_5(x)$) степени. Значения прогиба и соответствующие напряжения близки к значениям, соответствующим расчетной схеме, представленной на рис.1.

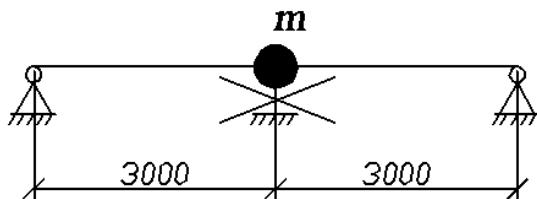


Рис.1

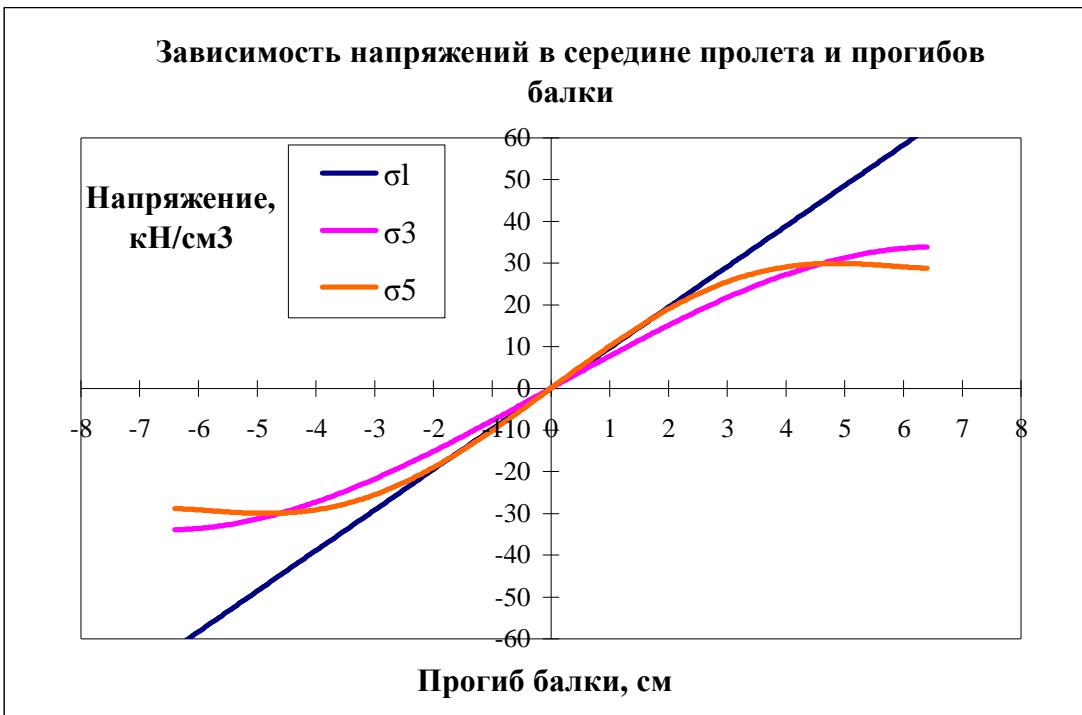


Рис. 2

Отметим, что в настоящей статье абсолютные значения напряжений, прогибов и усилий в балке приняты приблизительно, не принимая во внимание явления, сопряженные с поведением стали в упруго–пластической зоне, как–то: явление гистерезиса, динамическое упрочнение, уменьшение площади сечения. Главным предметом изучения является получение уравнений колебания балки с нелинейной упругой характеристикой. Численные значения приводятся исключительно для получения наглядных результатов, порядок которых близок к реальным с учетом вышеупомянутых оговорок.

Границами применимости каждого из нелинейных графиков условимся принимать значение абсциссы, при которой достигается первый экстремум функции. Так, в нашем случае это 6,414 см для полинома 3-й степени и 4,467 см для полинома 5-й степени.

Задача о колебаниях одномассовой балки с нелинейной упругостью, описываемой полиномом 3-й степени

Принципиальное отличие рассматриваемого случая от линейной постановки заключается в том, что в уравнение равновесия помимо сил инерции и упругих сил балки должен входить также вес массы. В теории линейных колебаний, как правило, влияние собственного веса опускают в связи с тем, что ни амплитуда, ни частота колебаний не зависят от веса балки и начальных условий, а при необходимости определения величины усилий в сечениях можно использовать принцип независимости действия сил.

Как известно, в нелинейной постановке принцип суперпозиции не выполняется, и действие собственного веса необходимо учитывать в основном дифференциальном

уравнении.

Рассмотрим балку на двух опорах, несущую одну сосредоточенную массу. Отклоним массу на небольшую величину и составим уравнение всех сил, действующих на систему:

$$m \cdot x'' + F(x) + P = 0 , \quad (3)$$

где $F(x)$ – упругая характеристика, $P=Const$ – собственный вес массы m .

Упругую характеристику опишем полиномом 3–й степени вида:

$$F(x) = B \cdot x - \mu \cdot C \cdot x^3 ,$$

где μ – некий малый параметр.

В литературе широко описано применение метода малого параметра Пуанкаре [4, с.22; 3, с.180] для решения классических задач нелинейной механики, например, осциллятора Дуффинга [2, с.122]. Для решения более широкого круга задач будем учитывать константу B , являющуюся множителем при x .

В решении ограничимся рассмотрением только членами при μ первого порядка.

Разделив на m и сгруппировав слагаемые, получим:

$$x'' + \beta \cdot x - \mu \cdot (\alpha + \delta \cdot x^3) = 0 , \text{ где} \quad (4)$$

$$-\frac{P}{m} = \alpha ; \frac{C}{m} = \delta ; \frac{B}{m} = \beta ;$$

Аналитическое решение методом малого параметра разделено на множители и приведено в табл.1.

Таблица 1

Частоты колебаний и перемещения массы при учете разных степеней малого параметра. Упругая характеристика задана полиномом 3–й степени

Порядок малого параметра	Круговая частота, ω_0	Координата, x_0
0	$\omega_0 = \sqrt{\beta}$	$x_0 = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$
1	$\omega_1 = -\frac{3 \cdot \delta \cdot A^2}{8 \cdot \sqrt{\beta}}$	$x_1(t) = \frac{1}{\beta} \left(\alpha + \left(\frac{\delta \cdot A^3}{32} - \alpha \right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{\delta \cdot A^3}{32} \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) \right)$

2	$\omega_2 = -\frac{21 \cdot \delta^2 \cdot A^4 - 192 \cdot A \cdot \alpha \cdot \delta}{256 \cdot \sqrt{\beta} \cdot \beta}$	$x_2(t) = \frac{\delta \cdot A^2}{2 \cdot \beta^2} \left(3\alpha + \frac{23 \cdot \delta \cdot A^3 - 1120 \cdot \alpha}{512} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \right.$ $\left. - \alpha \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) - \frac{3 \cdot \delta \cdot A^3 - 12 \cdot \alpha}{62} \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) + \right.$ $\left. + \frac{\delta \cdot A^3}{512} \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t) \right)$
---	--	--

Итоговое решение [1, с. 24]:

$$\omega = \omega_0 + \mu \cdot \omega_1 + \mu^2 \cdot \omega_2 \dots \quad (5)$$

$$x(t) = x_0(t) + \mu \cdot x_1(t) + \mu^2 \cdot x_2(t) \dots \quad (6)$$

В линейной постановке с учетом действия постоянной силы $P=Const$ дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки будет иметь вид:

$$x'' + \beta \cdot x = \mu \cdot \alpha \quad (7)$$

А его решение:

$$x_l(t) = \left(A - \frac{\alpha_l}{\beta_l} \right) \cdot \cos(\omega_l \cdot t) + \frac{\alpha_l}{\beta_l}, \quad (8)$$

где $\omega_l = \sqrt{\beta_l}$.

Для наглядного представления и количественной оценки рассмотрим пример, описанный в начале (рис.1).

Упругая характеристика балки, описанная функцией $\sigma_3(x)$ (кН):

$$F_3(x) = 14,817x - 0,116x^3$$

Собственный вес (кН):

$$P=Const=46,6 \text{ кН}$$

Сумма всех действующих сил:

$$m \cdot \frac{d^2 \cdot x}{d \cdot t^2} + F(x) + P = 0$$

Итоговый вид нелинейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \cdot x}{d \cdot t^2} + 981,053 + 311,937x - 2,442x^3 = 0$$

Соответственно, значения коэффициентов уравнения (4):

$$\alpha = -981,053 \quad \beta = 311,937 \quad \delta = 2,442 \quad \mu = 1$$

В линейной постановке упругая характеристика балки описана функцией $\sigma_l(x)$. (см. рис.1). Её вид:

$$F_l(x)=9,719x$$

Итоговый вид нелинейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \cdot x}{d \cdot t^2} + 981,053 + 389,179x = 0$$

Перемещения массы при разных значениях начального отклонения (A) и учете слагаемых при разных степенях малого параметра приведены в табл. 3. На графиках представлены два случая – при отклонениях, вызывающих колебания, близкие к линейным (рис.3а), и сильно нелинейные колебания (рис.3б).

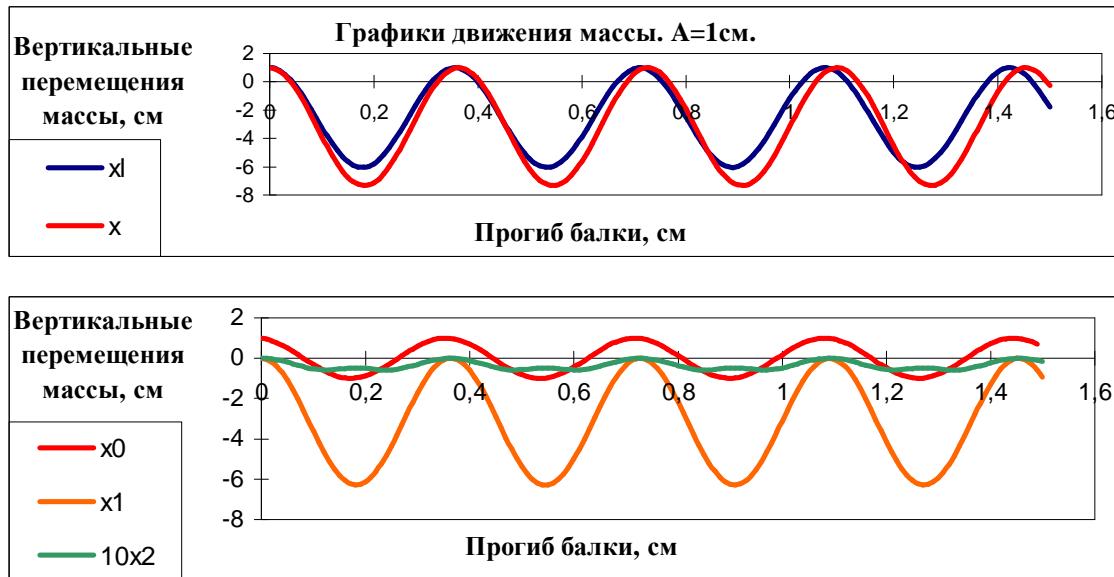


Рис. 3а

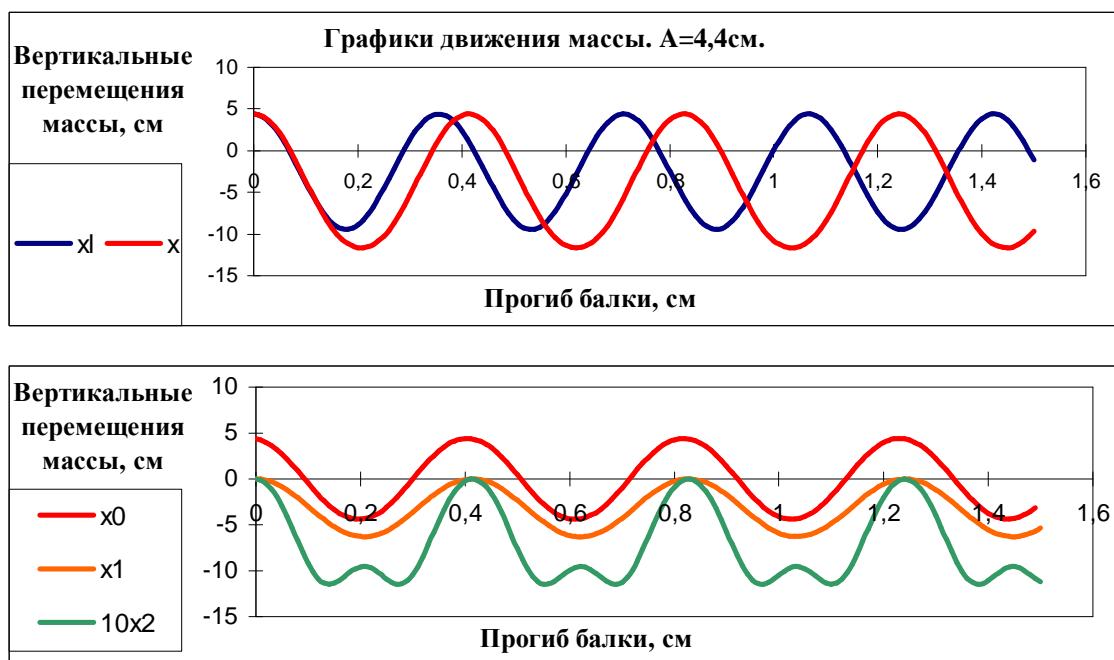


Рис.3б.

Задача о колебаниях одномассовой балки с нелинейной упругостью, описываемой полиномом 5–й степени

Вернемся к диаграмме растяжения–сжатия, представленному на рис.2. Очевидно, что аппроксимация полиномом более высокой степени дает более точный результат и для повышения точности метода следует по–возможности использовать полином 5–й степени.

Уравнение (4) в этом случае принимаем вид:

$$m \cdot x'' + \beta \cdot x = \mu \cdot (\alpha + \delta \cdot x^3 + \gamma \cdot x^5) \quad (9)$$

Аналитическое решение методом малого параметра приведено в табл.2.

Таблица 2

Частоты колебаний и перемещения массы при учете разных степеней малого параметра. Упругая характеристика задана полиномом 5–й степени

Порядок малого параметра	Круговая частота, ω_0	Координата, x_0
0	$\omega_0 = \sqrt{\beta}$	$x_0 = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$
1	$\omega_1 = -\frac{6 \cdot \delta \cdot A^2 + 5 \cdot \gamma \cdot A^4}{16 \cdot \sqrt{\beta}}$	$x_1(t) = \frac{1}{\beta} \left(\alpha + \left(\frac{3 \cdot \delta \cdot A^3 - 96\alpha + 4 \cdot \gamma \cdot A^5}{96} \right) \cos(\alpha) - \frac{4 \cdot \delta \cdot A^3 + 5 \cdot \gamma \cdot A^5}{128} \cos(3 \cdot \omega \cdot t) - \frac{\gamma \cdot A^5}{384} \cos(5 \cdot \omega \cdot t) \right)$
2	$\omega_2 = -\left(\frac{252 \cdot \delta^2 \cdot A^4 - 2304 \cdot A \cdot \alpha \cdot \delta}{3072 \cdot \sqrt{\beta} \cdot \beta} + \frac{215 \cdot \gamma^2 \cdot A^8 - 3840 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot A^3 + 456 \cdot \gamma}{3072 \cdot \sqrt{\beta} \cdot \beta} \right)$	$x_2(t)$ см. ниже*

$$* x_2(t) = \left(\frac{3 \cdot A^2 \cdot \alpha (5 \cdot \gamma \cdot A^2 + 4 \cdot \delta)}{8 \cdot \beta^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-178176 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot A^4 - 161280 \cdot \alpha \cdot \delta \cdot A^2 + 3791 \cdot \gamma^2 \cdot A^9 + 3312 \cdot \delta^2 \cdot A^5 + 7260 \cdot \gamma \cdot \delta \cdot A^7}{147456 \cdot \beta^2} \right) \cos(\omega \cdot t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha \cdot A^2 \cdot (3 \cdot \delta + 5 \cdot \gamma \cdot A^2)}{6 \cdot \beta^2} \cos(2 \cdot \omega \cdot t) - \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot A^4}{24 \cdot \beta^2} \cos(4 \cdot \omega \cdot t) - \right.$$

$$\left. - \frac{A^2 \cdot (320 \cdot A^7 \cdot \gamma^2 + 288 \cdot A^3 \cdot \delta^2 - 1152 \cdot \alpha \cdot \delta - 2400 \cdot A^2 \cdot \alpha \cdot \gamma + 615 \cdot A^5 \cdot \gamma \cdot \delta)}{12288 \cdot \beta^2} \cos(3 \cdot \omega \cdot t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A^4 \cdot (12 \cdot A \cdot \delta^2 + 160 \cdot \alpha \cdot \gamma + 7 \cdot A^3 \cdot \gamma \cdot \delta)}{12288 \cdot \beta^2} \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t) + \\
& + \frac{A^7 \cdot \gamma \cdot (72 \cdot \delta + 95 \cdot A^2 \cdot \gamma)}{294912 \cdot \beta^2} \cdot \cos(7 \cdot \omega \cdot t) + \frac{A^9 \cdot \gamma^2}{98304 \cdot \beta^2} \cdot \cos(9 \cdot \omega \cdot t)
\end{aligned}$$

Значения ω и $x(t)$ определяются по уравнениям (5) и (6), соответственно.

Значения коэффициентов, входящих в уравнение (9) и соответствующих кривой, изображенной на рис.2:

$$\alpha = -981,053 \quad \beta = 414,956 \quad \delta = 9,009 \quad \gamma = -0,008 \quad \mu = 1$$

Перемещения массы при разных значениях начального отклонения (A) и учете слагаемых при разных степенях малого параметра приведены в табл. 3. На графиках представлены два случая – при отклонениях, вызывающих колебания, близкие к линейным (рис.4а), и сильно нелинейные колебания (рис.4б):

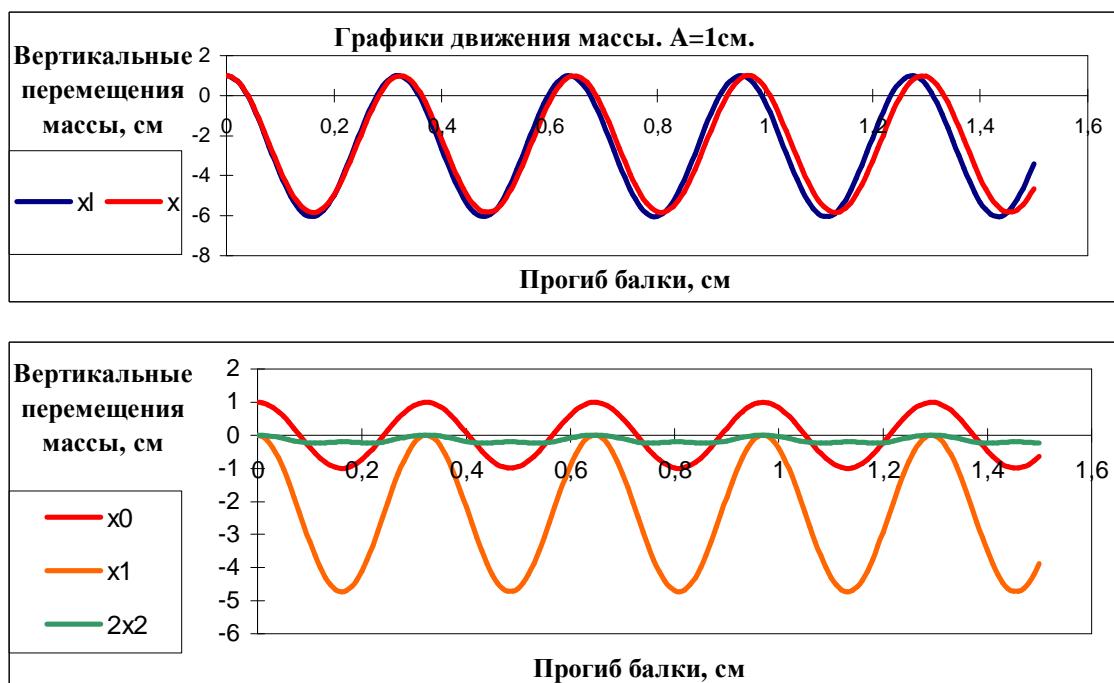
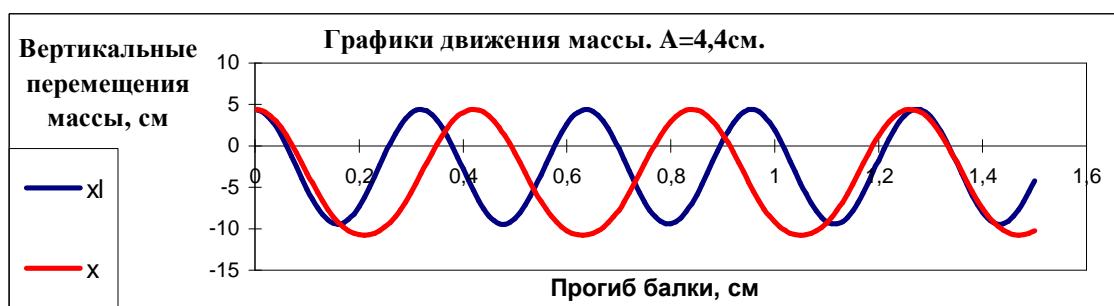


Рис.4а.



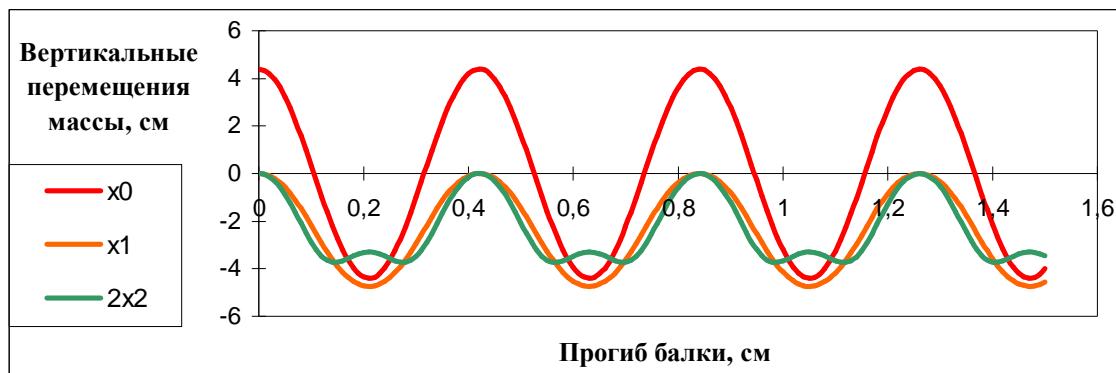


Рис. 4б

Сводные таблицы расчетов

В таблицах ниже x_1 , x_3 и x_5 – перемещения массы в случае задания упругой характеристики балки функциями σ_1 , σ_3 , σ_5 , соответственно; ω_1 , ω_3 и ω_5 – круговые частоты при σ_1 , σ_3 , σ_5 .

Результаты приведены для начальных отклонений A , соответствующих упругим ($A=1\text{ см}$), близким к пределу текучести ($A=2\text{ см}$) и лежащим за пределом текучести ($A=4,4\text{ см}$) напряжениям в балке.

Таблица 3

Перемещения массы при учете разных степеней малого параметра. Сравнение балки с линейной и нелинейной упругостью

Порядок малого параметра	Min x_1	Min x_3	$\frac{x_3 - x_1}{x_3} \cdot 100$	Min x_5	$\frac{x_5 - x_1}{x_5} \cdot 100$
$A=1\text{ см}$					
0	6,04126	0,99980	504	0,99948	504
1		7,28923	17,12	5,72671	5,49
2		7,33841	17,68	5,82850	3,65
$A=2\text{ см}$					
0	7,04115	1,99973	252	1,99951	252
1		8,28938	15,06	6,72741	4,66
2		8,48607	17,03	7,12354	1,16
$A=4,4\text{ см}$					
0	9,44089	4,39989	114,6	4,39998	114
1		10,6899	11,68	9,12844	3,42
2		11,6417	18,90	10,7742	12,37

Таблица 4

Круговые частоты колебаний при учете разных степеней малого параметра. Сравнение балки с линейной и нелинейной упругостью

Порядок ядок малого параметра	Min ω_1	Min ω_3	$\frac{\omega_3 - \omega_l}{\omega_3} \cdot 10^3$	Min ω_5	$\frac{\omega_5 - \omega_l}{\omega_5} \cdot 10^3$
A=1 см					
0	6,0413	17,6617	10,474	20,3705	3,257
1		17,6099	10,737	20,206	2,422
2		17,2837	12,390	19,432	1,498
A=2 см					
0	19,728	17,6617	10,474	20,3705	3,257
1		17,4543	11,525	19,727	0,007
2		16,8007	14,839	18,239	7,546
A=4,4 см					
0	19,728	17,6617	10,474	20,3705	3,257
1		16,6579	15,562	17,6197	10,687
2		15,1897	23,005	14,9470	24,234

Отметим несколько закономерностей:

1. Необходимо учитывать члены, степень малого параметра при которых не меньше единицы.
2. При небольших начальных отклонениях особенно сильно проявляется погрешность использования полинома 3-й степени. Так, перемещения массы при начальном отклонении 1 см в линейной постановке должно быть максимально приближено к нелинейной. При использовании упругой характеристики σ_3 погрешность составляет 17,12% – 17,68%, тогда как для σ_5 эта величина 5,49% – 3,65%. Похожая картина и для отклонения 2 см, также соответствующего упругой работе материала.
3. По мере роста начального отклонения существенно растет значимость использования членов при высших степенях малого параметра.

Следует обратить внимание, что в указанных примерах причиной возникновения колебаний является действие постоянного веса массы и начальное отклонение от положения статического равновесия, причем величина начального отклонения в представленных примерах целенаправленно принята независящей от веса.

При реальном расчете балки с нелинейной упругой характеристикой, несущей

сосредоточенную массу и подверженной внезапному удалению связи, величина начального отклонения будет фиксированной. Алгоритм расчета на внезапное удаление связи будет следующим:

- Статический расчет системы до удаления связи. Определение смещения массы Δ_0 .
 - Выбор аппроксимирующей функции для упругой характеристики балки, запись коэффициентов $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \mu$.
 - Статический расчет физически нелинейной системы после удаления связи. Определение смещения массы Δ_1 .
- Определение величины начального смещения как разности величин Δ_1 и Δ_0 .
 - Подстановка всех величин в уравнения (5) и (6).

Выводы

1. Метод малого параметра Пуанкаре применим для динамического расчета одномассовой балки с нелинейной упругой характеристикой, подверженной внезапному удалению связи, и позволяет аналитически получить решение задачи о собственных колебаниях.
2. Учет нелинейности позволяет в несколько раз расширить границы применимости метода, описанного в [1] за счет роста максимально возможного начального отклонения массы, даже если соответствующие ему напряжения лежат за пределом упругости.
3. Точность решения сильно зависит от функции, описывающей нелинейно–упругую характеристику балки, поиск этой функции является отдельной, довольно трудоемкой задачей.
4. Развитие подхода требует учета явления гистерезиса.

Список литературы

1. Бондарев Ю.В., Нгуен Тханх Суан. Расчёт стержневых систем при внезапном удалении отдельных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. –2010, №4. – с. 43–48.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов СП., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов.—М.: Издательство физико–математической литературы, 2002.—292 с.
3. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ: Пер. с англ Е.И.Зино, Э.А.Троппа. – М.: Мир, 1984, 535с.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. / Т. Хаяси. под ред. Боголюбова В.Е.– М.: Издательство «Мир», 1968. – 432 с.
5. Хромов В. Г., Хромов И. В. Выбор аппроксимирующей функции для диаграммы

растяжения материала в задачах технологической механики стержня // Вестн. СевГТУ. Механика, энергетика, экология. - 2007. - Вып. 80. - С. 20 - 22.

Рецензенты:

Масленников А.М., д.т.н., профессор кафедры Строительной механики, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», г. Санкт-Петербург;

Кондратьева Л.Н., д.т.н., профессор, зав. кафедрой Строительной механики, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», г. Санкт-Петербург.