

## ВЛИЯНИЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ЖИДКОСТИ И МАТЕРИАЛА НА ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Тер-Акопянц Г.Л.<sup>1</sup>, Тер-Акопянц Л.Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>СПбГМТУ «Санкт-Петербургский Государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия (190008, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3), e-mail: go-ter@mail.ru.

Рассматривается распространение волн в упругой изотропной круговой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью. Жидкость считается идеальной и несжимаемой. Уравнения движения оболочки базируются на моментной теории оболочек. Определяются волновые числа для симметричной, изгибной (балочной) и несимметричной относительно оси оболочки типов волн. С помощью четырёх независимых методов находятся численные решения дисперсионного уравнения (метод дихотомии и его модификация для комплексных функций, метод минимизации модуля, метод наискорейшего спуска Ньютона, метод численного решения дифференциального уравнения для фазовой скорости). Сравниваются результаты, полученные различными методами. Проанализировано влияния отношения плотностей жидкости и материала на вещественные, мнимые и комплексные дисперсионные кривые. На их основе проанализировано распространение и затухание волн. Найдены интервалы частот отсечки. Численные решения дисперсионного уравнения для оболочки с жидкостью сопоставляются с соответствующими результатами для оболочки без жидкости и волновыми числами для жесткого волновода.

Ключевые слова: упругая цилиндрическая оболочка с жидкостью, дисперсионные кривые, распространение волн, частота отсечки.

## THE INFLUENCE OF THE DENSITIES RATIO OF FLUID AND MATERIAL ON THE DISPERSION CURVES FOR THE ELASTIC CYLINDRICAL SHELL

Ter-Akopyants G.L.<sup>1</sup>, Ter-Akopyants L.G.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SPbGMTU «Sankt-Petersburg State Marine Technical University», Sankt-Petersburg, Russia (190008, Sankt-Petersburg, Lotsmanskaya street, 3), e-mail: go-ter@mail.ru.

We considered the wave propagation in the elastic isotropic fluid-filled circular cylindrical shell. The fluid is assumed to be ideal and incompressible. The equation of motion of a shell based on the couple-stress theory of shells. We found the wavenumbers for symmetric about the axis (breathing mode), flexural (beam mode) and asymmetrical about the axis types of waves. Using the four independent numerical methods we have solved the dispersion equation (the method of dichotomy and its modification for complex functions, the method of minimizing module, Newton's method of steepest descent, method for the numerical solution of the differential equation for the phase velocity). The results obtained by different methods are compared. We analyzed the impact of the relationship of the densities of fluid and material on the real, imaginary and complex dispersion curves. Based on this, we have considered the propagating wave and the attenuating waves. We found the cut-on frequency range. The numerical solutions of the dispersion equation for fluid-filled shell are matched with the numerical solutions of the dispersion equation for empty shell and with the wavenumbers for the rigid duct.

Keywords: elastic cylindrical fluid-filled shell, dispersion curves, propagation of waves, cut-on frequency.

### Постановка задачи

Целью работы явилось исследование дисперсионных кривых упругой цилиндрической оболочки, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, в зависимости от соотношения плотностей жидкости и материала оболочки и апробация различных методов их нахождения.

Рассматривается тонкая бесконечная упругая цилиндрическая оболочка толщины  $h$  радиусом срединной поверхности  $R$ . Динамические уравнения движения оболочки по моментной теории в безразмерных координатах  $\{z = z_{размер}/R; r = r_{размер}/R; \varphi\}$  можно, следуя [2], описать следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{L}\bar{u} = \frac{(1-\nu^2)R^2}{E_0 h} (-p_1, -p_2, p_n)^T + \rho \frac{(1-\nu^2)R^2}{E_0} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^T, \quad (1)$$

$$\text{где } L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{22} = \frac{1-\nu}{2} (1+4a) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+a) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{33} = 1 + a \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2,$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi}, \quad L_{13} = L_{31} = \nu \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \varphi} - a \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3}, \quad \bar{u} = (u, v, w)^T -$$

вектор перемещения с осевой, окружной и радиальной компонентами,  $\bar{p} = (p_1, p_2, -p_n)^T$  - вектор внешней нагрузки ( $\bar{p} = 0$  для свободных колебаний без жидкости),  $\rho$  - плотность

материала,  $E_0$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $a = \frac{h^2}{12R^2}$

Движение идеальной жидкости в оболочке в безразмерных координатах описывается [1] уравнением для потенциала скоростей:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - \frac{R^2}{c_{fl}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Будем считать жидкость несжимаемой (скорость звука в жидкости  $c_{fl} \rightarrow \infty$ ).

Условие на границе жидкость-оболочка имеет вид:

$$\left. \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3)$$

Таким образом, динамические уравнения колебаний оболочки с жидкостью представляют собой систему уравнений (1)–(2) с граничным условием (3). Будем искать её решения в виде суммы решений для каждого отдельно взятого значения окружного волнового числа  $m = 0, 1, 2, \dots$  (числа окружных волн). Это позволит решать систему (1)–(2) независимо для каждого фиксированного  $m$ .

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, \varphi, t) &= \sum_m \left( U_m e^{kz-i\Omega t} \cos(m\varphi), V_m e^{kz-i\Omega t} \sin(m\varphi), W_m e^{kz-i\Omega t} \cos(m\varphi) \right)^T \\ \phi(z, \varphi, r, t) &= \sum_m \phi_m(r) e^{kz-i\Omega t} \cos(m\varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Omega$  - частота,  $k$  - приведённое осевое волновое число ( $k = \lambda R$ , где  $\lambda$  - волновое число).

Выбор перемещений в виде (4) означает, что чисто мнимые значения  $k$  соответствуют распространяющимся волнам, чисто вещественные - апериодическим неволновым перемещениям, а полностью комплексные - затухающим волнам. Всегда имеется две волны, движущиеся в противоположных направлениях. Выбранный вид решений означает, что при  $\text{Im}(k) > 0$  волна движется в направлении оси  $0z$  и затухает в направлении  $0z$  при  $\text{Re}(k) < 0$ .

Поиск решения в таком виде для потенциала скоростей сводит уравнение (2) к уравнениям Бесселя для  $\phi_m(r)$  и, как показано в [1] и подробно описано в [4], после удовлетворения условию (3), от системы остается лишь уравнение (1), в правой части которого появляется контактное давление жидкости на стенку оболочки в виде:

$$p_n = -\rho_{fl} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho_{fl} \phi_m(r) \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{kz-i\Omega t} \cos(m\varphi) \right) = \rho_{fl} \Omega^2 R^2 \frac{W_m J_m(k)}{\left. \frac{\partial J_m(rk)}{\partial r} \right|_{r=1}} e^{kz-i\Omega t} \cos(m\varphi), \quad (5)$$

где  $\rho_{fl}$  – плотность жидкости.

Перенесем правые части уравнения (1) налево, подставим в него перемещения в виде (4) и формулу (5), разделим обе части уравнения на  $e^{kz-i\Omega t} \cos(m\varphi)$  и введём приведённую частоту  $\omega^2 = \rho \frac{1-\nu^2}{E_0} R^2 \Omega^2$ . Тогда получим матричное уравнение

$$\mathbf{L}^* \vec{U}_m = 0, \quad (6)$$

где  $\vec{U}_m = (U_m, V_m, W_m)^T$ , с матрицей оператора  $\mathbf{L}^*$  в виде

$$\left( \begin{array}{ccc} k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & \nu k \\ -\frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} (1+4a)k^2 - (1+a)m^2 + \omega^2 & -m + a(2-\nu)k^2 m - am^3 \\ \nu k & m - a(2-\nu)k^2 m + am^3 & 1 + a(k^2 - m^2)^2 - \omega^2 \left( 1 + \frac{\rho_{fl} R}{\rho h} \frac{J_m(k)}{\left. \frac{\partial J_m(rk)}{\partial r} \right|_{r=1}} \right) \end{array} \right), \quad (7)$$

Дисперсионное уравнение для оболочки с жидкостью при каждом фиксированном  $m$  получается, если приравнять к нулю определитель матрицы (7). Оно имеет вид:

$$a_8 k^8 + a_6(\omega) k^6 + a_4(\omega) k^4 + a_2(\omega) k^2 + a_0(\omega) + (b_4(\omega) k^4 + b_2(\omega) k^2 + b_0(\omega)) \frac{\rho_{fl} R}{\rho h} f_m(k) = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } f_m(k) = \frac{J_m(k)}{\left. \frac{\partial J_m(rk)}{\partial r} \right|_{r=1}} = \frac{J_m(k)}{mJ_m(k) - kJ_{m+1}(k)}.$$

Дисперсионное уравнение для пустой оболочки получается из (7), если положить  $\rho_{fl} = 0$ .

Рассмотрим случай  $m=0$ . Вычисляя определитель матрицы  $\mathbf{L}^*$  с помощью разложения по второй строке, получим дисперсионное уравнение в виде совокупности следующих уравнений

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{2}(1+4a)k^2 + \omega^2 = 0 \\ ak^6 + a\omega^2 k^4 + (1-\omega^2 - \nu^2)k^2 + \omega^2 - \omega^4 + (k^2\omega^2 + \omega^4) \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} \frac{J_0(k)}{kJ_1(k)} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

Решение первого из них даёт два чисто мнимых корня, одинаковых для оболочки с жидкостью и без неё. Это говорит о том, что две распространяющиеся волны при  $m=0$ , начинающиеся с  $\omega=0$ , имеются всегда, независимо от наличия жидкости. Левая часть второго уравнения в отсутствии жидкости ( $\rho_{fl}=0$ ) является многочленом 6-го порядка по  $k$ .

Для анализа полученных результатов потребуется также знание осевых волновых чисел жесткого цилиндрического волновода. В этом случае правая часть граничного условия для потенциала скоростей (3) будет равна нулю. В безразмерных координатах получим дисперсионное уравнение, не зависящее от  $\omega$ .

$$\left. \frac{\partial J_m(rk)}{\partial r} \right|_{r=1} = 0. \quad (10)$$

Численное решение дисперсионного уравнения при отсутствии жидкости является несложной задачей, так как при этом ищутся корни многочлена. При наличии жидкости дисперсионное уравнение является трансцендентным из-за наличия жидкостной добавки в виде функций Бесселя. В общем виде его можно записать в виде  $F(k, \omega) = 0$ , где и сама функция  $F$ , и аргумент  $k$  являются, вообще говоря, комплексными.

### Методы, применяемые для решения дисперсионного уравнения

1. Метод дихотомии для нахождения чисто вещественных и чисто мнимых корней, а также его модификация для нахождения полностью комплексных корней, основанная на том, что в некоторой окрестности любой точки линии пересечения поверхности  $\text{Re}(F(k, \omega))$  или  $\text{Im}(F(k, \omega))$  с комплексной плоскостью  $\{k\}$  найдутся две точки, в которых функция будет иметь разные знаки.

2. Метод поточечной минимизации модуля функции  $F$ .

3. Метод наискорейшего спуска Ньютона  $k(\omega_{i+1}) = k(\omega_i) - \frac{F(k(\omega_i), \omega_i)}{F'_k(k(\omega_i), \omega_i)}$

4. Метод, описанный в [3], основанный на численном решении дифференциального

уравнения  $\frac{dk}{d\omega} = -\frac{F'_\omega(k, \omega)}{F'_k(k, \omega)}$ .

Заметим, что методы 3 и 4 требуют для своей реализации стартовой точки, то есть значений  $k$  при  $\omega=0$ , а эти значения совпадают со значениями для случая без жидкости, что очевидно из дисперсионных уравнений. В то же время это ограничивает возможность их применения для нахождения кривых, начинающихся при  $\omega \neq 0$ .

## Обсуждение результатов

При рассмотрении дисперсионных кривых для оболочки с жидкостью многие исследователи рассматривали только кривые, соответствующие распространяющимся волнам. Однако есть работы, например [5], где приводятся более полные результаты.

Чисто вещественные дисперсионные кривые, представленные на рис. 1, показывают, что, как только пустая оболочка становится заполненной жидкостью, так при сколь угодно малых  $\omega > 0$  появляются прямые линии, соответствующие жесткому цилиндрическому волноводу, с точками ветвления, зависящие от отношения плотностей. В них появляются новые кривые, видоизменяющие свою форму по мере роста отношения плотностей жидкости и оболочки. Эта картина наблюдается для всех значений  $m=0,1,2,3$ .

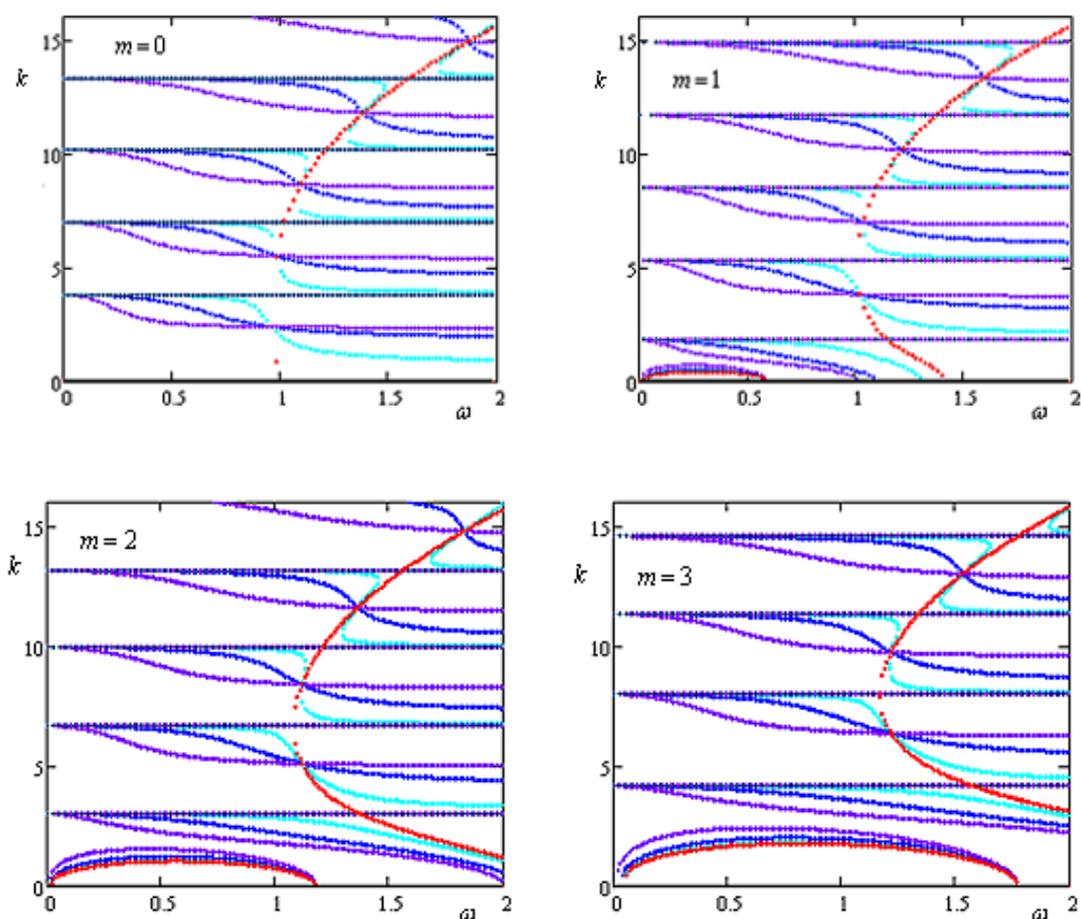


Рис. 1. Чисто вещественные дисперсионные кривые при  $m=0, 1, 2, 3$  для оболочки без жидкости (красная линия) и с жидкостью при различных отношениях плотностей. Голубая линия соответствует  $\rho_l / \rho = 0.01$ ; синяя –  $\rho_l / \rho = 0.1$ ; фиолетовая –  $\rho_l / \rho = 1$

На рис. 2 представлены чисто мнимые ветви дисперсионных кривых, характеризующие распространяющиеся волны. Они достаточно легко определяются любым из вышеперечисленных методов. Для сравнения красной линией показаны чисто мнимые дисперсионные кривые для оболочки без жидкости. Кривые показывают, что первая и вторая

распространяющиеся волны структурного происхождения – наличие и плотность жидкости не влияют на частоту отсечки, с ростом отношения плотностей меняется лишь длина и осевая частота у первой распространяющейся волны. Третья распространяющаяся волна – результат взаимодействия оболочки с жидкостью. Частота отсечки снижается с ростом отношения плотностей жидкости и оболочки. Следует заметить, что при  $m=2$  и при  $m=3$  первые мнимые ветви начинаются не при  $\omega=0$ , а при  $\omega \in (0.01, 0.06)$ , но этого не видно в масштабах рисунка.

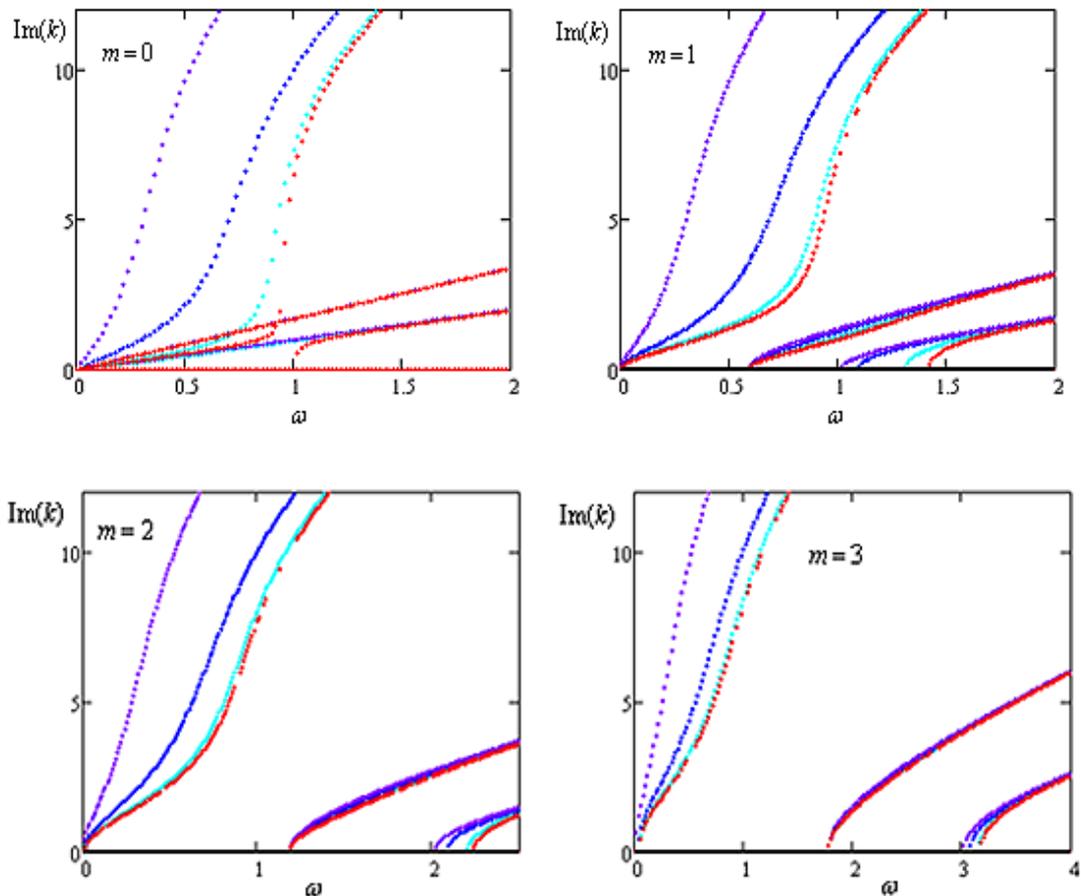


Рис. 2. Чисто мнимые дисперсионные кривые при  $m=0, 1, 2, 3$  для оболочки без жидкости (красная линия) и с жидкостью при различных отношениях плотностей. Голубая линия соответствует  $\rho_f / \rho = 0.01$ ; синяя –  $\rho_f / \rho = 0.1$ ; фиолетовая –  $\rho_f / \rho = 1$

Нахождение полностью комплексных ветвей представляло наибольшие проблемы потому, например, что в отсутствии жидкости полностью комплексная ветвь распадается в точке так называемого, кольцевого резонанса ( $\omega=1$ ) на две чисто вещественные. При этом в указанной точке фазовая скорость ( $k'(\omega)$ ) обращается в бесконечность (касательная к графику вещественной или мнимой части принимает вертикальное положение). Естественно при этом результаты, полученные методами 3 и 4, не могут приниматься как достоверные без дополнительных проверок. Недостатки методов 3 и 4 появляются также и по причине

накопления погрешности, так как это итеративные методы. Поэтому, собственно, и возникла потребность в таких простых и очевидных методах, как 1 и 2, но требующих значительных вычислительных ресурсов, так как при каждом значении частоты необходимо вычислять значения комплексной функции, содержащей функции Бесселя, в большом количестве точек комплексной области немалого размера. Тем не менее эти трудности удалось преодолеть. Методы 1–3 показали близкие результаты при  $\rho_{fl}/\rho \geq 0.08$ , метод 4 дает правильные результаты при  $\rho_{fl}/\rho > 0.12$ . При меньших значениях  $\rho_{fl}/\rho$  следует применять лишь методы 1 и 2. Сопоставление различных методов иллюстрирует рис. 3.

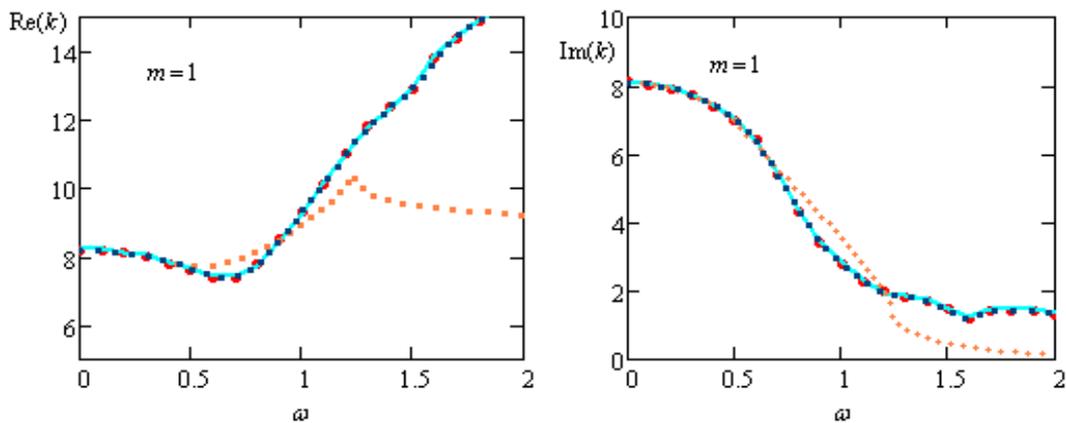


Рис. 3. Сопоставление комплексных дисперсионных кривых, полученных различными методами при  $m=1$  и отношении плотностей 0.1. Красная линия – метод 1, голубая – метод 2, тёмно синяя – метод 3, оранжевая – метод 4

Полученные результаты представлены на рис. 4 и означают следующее. При наличии жидкости и с ростом её относительной плотности точка бифуркации постепенно исчезает, а полностью комплексная ветвь, начинающаяся при  $\omega=0$  и заканчивающаяся при  $\omega \approx 1$ , продолжается дальше, оставаясь полностью комплексной. Продолжение (зарождение) комплексной ветви после точки кольцевого резонанса происходит из верхней чисто вещественной ветви, а нижняя чисто вещественная исчезает. Увеличение относительной плотности жидкости ведёт усилению интенсивности затухания ( $\text{Re}(k)$ ), так и изменению “осевой частоты” ( $\text{Im}(k)$ ), характер которого можно проследить на рис 4. Во всех расчетах принималось  $h/R=0.025$ .

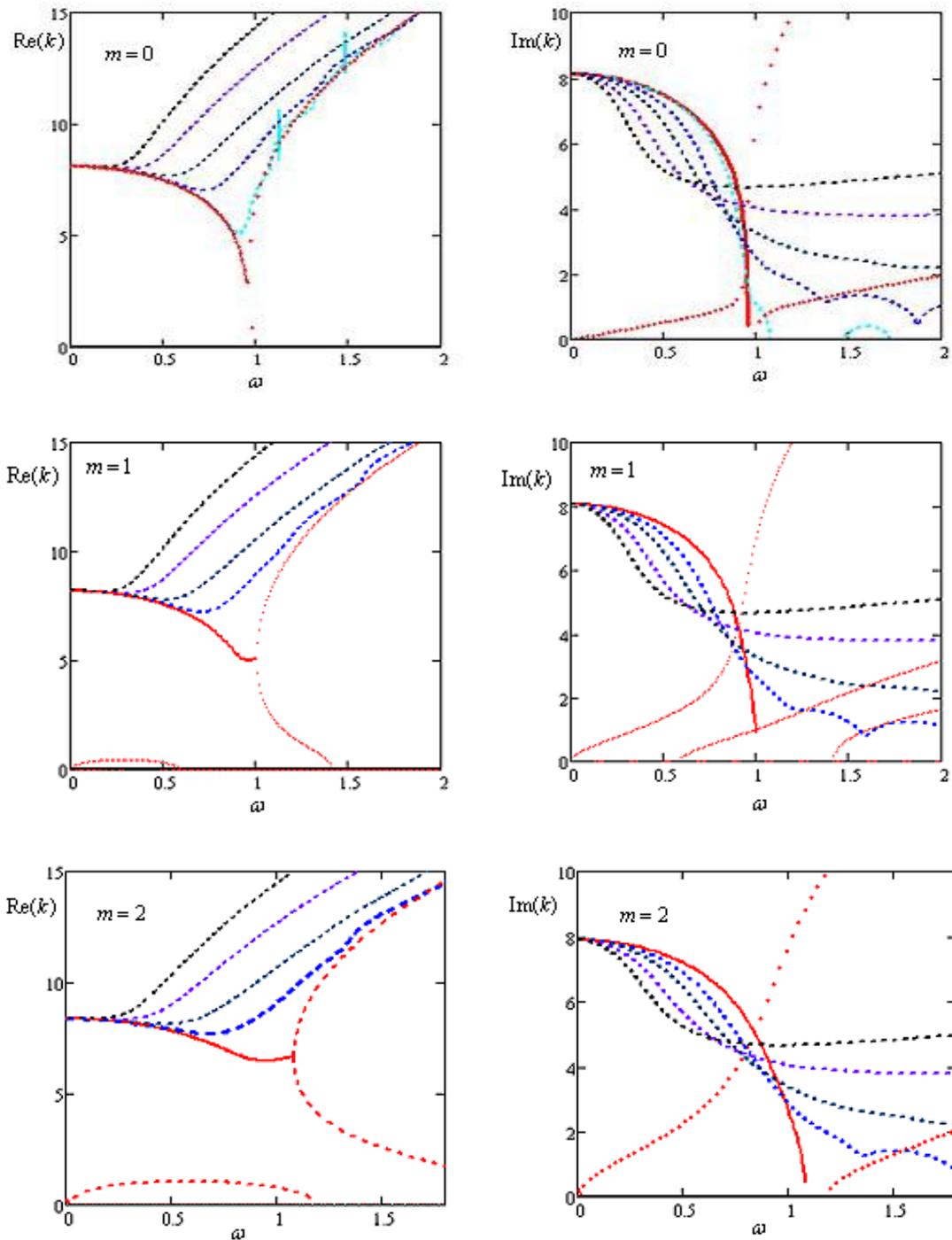


Рис. 4. Вещественные и мнимые части полностью комплексных дисперсионных кривых при  $m=0, 1, 2$  для оболочки без жидкости (красная сплошная – комплексные, красная пунктирная – вещественные или мнимые) и с жидкостью при различных отношений плотностей  $\rho_f/\rho$ :

синяя линия – 0.08; тёмно-синяя – 0.2; фиолетовая – 0.5; черная – 1

### Выводы

При наличии жидкости появляется новый набор аperiодических неволновых перемещений (чисто вещественные дисперсионные кривые), изменяющихся с ростом относительной плотности, включающий в себя перемещения жидкости в жестком волноводе.

Частота отсечки третьей распространяющейся волны (чисто мнимые дисперсионные кривые) уменьшается с ростом относительной плотности жидкости.

При наличии жидкости комплексная ветвь не распадается на две вещественные. С ростом относительной плотности интенсивность затухания волны увеличивается.

### Список литературы

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
3. Григорьев-Голубев В.В., Кадыров С.Г., Тер-Акопянц Г.Л. К вопросу о решении дисперсионных уравнений. Морские интеллектуальные технологии. – 2014. - № 2(24). – Т. 2. – С. 87-91.
4. Тер-Акопянц Г.Л. Об уточнении результатов влияния жидкости на распространение волн в упругой цилиндрической оболочке. Фундаментальные исследования. – 2013. - №10 (часть 3). – С. 516-520.
5. Vijay Prakash S., Venkata R. Sonti. Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate frequency range. Journal of Sound and Vibration. Manuscript Draft. Manuscript Number: JSV-D-12-01440. – 15 p.

### Рецензенты:

Картузов Е.И., д.т.н., профессор, профессор кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского Государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург;  
Хазанов В.Б., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского Государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург.