УДК 621.39

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Султанкулова А.Л., Тохаева А.О., Серикбаева Г.И., Сулейменова Н.М., Сулейменов К.М.

Университет «Туран-Астана», Астана, Казахстан, г. Астана, ул. Ы.Дукенулы 29, ayasul06@gmail.com

При изучении разделов теории приближения, одним из важных подходов является разложение функций в функциональный ряд по некоторой системе функций, затем изучая сходимости (аналогично абсолютной сходимости рядов Фурье), исследуем свойства самой функции. Кроме того, разложение функции по системе Хаара применяются в исследованиях по теории вложения классов функций, при этом основная задача заключается в нахождении необходимых и достаточных условий вложения, по которым будет выяснена потеря гладкости при переходе функции из одного класса с определенной метрикой в другой, с более высшей метрикой. Данная работа тесно связана с цифровой обработкой сигнала (ЦОС), потому что основной задачей ЦОС является преобразование непрерывного сигнала в дискретный. В работе вводится системы типа Хаара, затем доказывается ортонормированность данной системы и применение в разложении степенной функции по определенной ортонормированной системе функций.

Ключевые слова: Система функций типа Хаара, ортонормированность системы функций.

METHOD OF EXPANSION OF FUNCTIONS ON ORTHONORMAL SYSTEM OF FUNCTIONS

Sultankulova A.L., Tohaeva A.O., Serikbaeva G.I., Suleimenova N.M., Suleimenov K.M.

University "Turan-Astana" Astana, Kazakhstan, 29 Y.Dukenuly st. Astana, ayasul06@gmail.com

In the study of sections of approximation theory, an important approach is the expansion of functions in series of functions on a certain system functions, and then studying the convergence (similar to the absolute convergence of Fourier series), we investigate the properties of the function itself. In addition, the expansion of the Haar system used in research on the theory of embedding of classes of functions, and the main task is to find necessary and sufficient conditions for investments, which will be elucidated loss of smoothness of the transition function of a single class with definite metric in another with a higher metric. This work is closely related to digital signal processing (DSP), because the main task of the DSP is to convert the continuous signal into a discrete. This paper introduces the system of Haar-type, then prove the orthonormality of the system and the application in the expansion of the power function for a particular orthonormal system of functions.

Keywords: System functions of Haar orthonormality of the system functions.

Как известно, ортонормированная система Хаара была применена во многих исследованиях по теории вложения классов функций [2-3], к примеру, вложения классов $H_p^{\omega} \subset L^p$ $(1 \le p < q < \infty)$, где $\omega(\delta)$ - заданный модуль гладкости общего вида, исследования по которому начались из работ П.Л. Ульянова [8], а затем имели определенные развития (см., напр., в [1], [2-3], [5-7]).

Данные исследования тесно связаны с цифровой обработкой сигнала, а именно, с преобразованием непрерывного сигнала в дискретный, т.е. рекуррентным соотношением в некотором ортогональном базисе [4], а именно, данную ортонормированную систему функций следует преобразовать сохраняя ортогональность, затем можно принять в качестве импульса сигнала, исследуя влияние введенного параметра при разложении непрерывного сигнала в виде суммы дискретных функций.

В данной работе, система Хаара, в определенном смысле, обобщается, а именно, вводится некоторый параметр $\alpha \geq 0$, доказывается ортонормированность введенной системы и и исследуется влияние данного параметра в разложении некоторой (степенной) функции в ряд по определенной системе, причем устанавливается условие на введенный параметр. Дальнейшим продолжением теоретических исследований, предполагается исследования по разложению сигналов не степенного вида, а функции из класса L^p.

Работа состоит из двух разделов. В первом разделе определяется система типа Хаара и доказывается ортонормированность. Во втором разделе определяются коэффициенты разложения степенной функции по ортогональной системе функций.

1 Ортонормированная система типа Хаара

Определение. Пусть даны числа $\alpha > log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1$ и целое $m \geq 1$. Систему функций $\chi_m^{(k)}(x,\alpha)$ $k = 1,2,...,2^m$, *определленную в виде*

$$\chi_m^k(x,\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}} & x \in \left(\dfrac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}, \dfrac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}\right) \\ -\sqrt{\dfrac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}} & x \in \left(\dfrac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}, \dfrac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}\right) \\ 0, & x = 0, x \in \left(\dfrac{(l-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}, \dfrac{l^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}\right), \ l \neq k \end{cases}$$

назовем системой типа Хаара.

Замечание. Данная система определена по аналогии определения ситемы Хаара.

Справедлива

Теорема 1. Пусть даны число $\alpha > log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1$ *и целое* $m \geq 1$. *Тогда определенная на сегменте* $[0,1]$ *система типа* $\chi_m^{(k)}(x,\alpha)$ $k = 1,2,...,2^m$ *вида* ($m > 1$, $k = 1,2,...,2^m$ *и* $(0,1) = \bigcup_{k=1}^{m}\left(\dfrac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}, \dfrac{k^{(1+\alpha)}}{2^{m(1+\alpha)}}\right)$*)*

$$\chi_m^k(x,\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}} & x\in\left(\dfrac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}},\dfrac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}\right)\\ -\sqrt{\dfrac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}} & x\in\left(\dfrac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}},\dfrac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}\right)\\ 0, & x=0,x\in\left(\dfrac{(l-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}},\dfrac{l^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}\right),\ l\neq k\end{cases}\qquad(1)$$

является ортонормированной системой функций.

Доказательство. Покажем нормированность системы, т.е. справедливость

$$\left\|\chi_m^{(k)}(x,\alpha)\right\|_{R^2(0,1)}=1.\qquad(2)$$

Пусть $m=1$ и $k=1,2$. Тогда

$$\left\|\chi_1^{(1)}(x,\alpha)\right\|_{R^2(0,1)}=1.\qquad(3)$$

Действительно, при $m=1$ и $k=1$, имеем

$$\chi_1^{(1)}(x,\alpha)=\int_0^{\frac{1}{2^{(1+\alpha)}}}\left[\chi_1^{(1)}(x,\alpha)\right]^2dx=\int_0^{\frac{1}{2^{(1+\alpha)}}}\left[\chi_1^{(1)}(x,\alpha)\right]^2dx+\int_{\frac{1}{2^{(1+\alpha)}}}^{1}\left[\chi_1^{(1)}(x,\alpha)\right]^2dx=$$

$$=\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2}\cdot\frac{1}{2^{2(1+\alpha)}}+\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2\left(2^{1+\alpha}-1\right)}\cdot\left(\frac{1}{2^{1+\alpha}}-\frac{1}{2^{2(1+\alpha)}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2\left(2^{1+\alpha}-1\right)}\cdot\frac{2^{(1+\alpha)}-1}{2^{2(1+\alpha)}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Теперь, при $m=1$ и $k=2$, получим

$$\chi_1^{(2)}(x,\alpha)=\int_{\frac{1}{2^{(1+\alpha)}}}^{1}\left[\chi_1^{(2)}(x,\alpha)\right]^2dx=\int_{\frac{1}{2^{1+\alpha}}}^{\frac{1+2^{1+\alpha}}{2^{2(1+\alpha)}}}\left[\chi_1^{(2)}(x,\alpha)\right]^2dx+\int_{\frac{1}{\frac{1+2^{1+\alpha}}{2^{2(1+\alpha)}}}}^{1}\left[\chi_1^{(2)}(x,\alpha)\right]^2dx=$$

$$=\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2}\cdot\left(\frac{1+2^{1+\alpha}}{2^{2(1+\alpha)}}-\frac{1}{2^{(1+\alpha)}}\right)+\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2\left[2^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)\right]}\cdot\left(1-\frac{1+2^{1+\alpha}}{2^{2(1+\alpha)}}\right)=$$

$$=\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2}\cdot\frac{1}{2^{2(1+\alpha)}}+\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2\left(2^{1+\alpha}-1\right)}\cdot\frac{2^{(1+\alpha)}-1}{2^{2(1+\alpha)}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

тем самым, (3) доказано. Дя любого $m\geq1$ докажем соотношение (2). В самом деле, для

$$(0,1)=\bigcup_{k=1}^{m}\left(\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}},\frac{k^{(1+\alpha)}}{2^{m(1+\alpha)}}\right),$$

будем иметь

$$\int_0^1 \left[\chi_m^k(x,\alpha)\right]^2 dx = \int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}}^{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}} \left[\chi_m^{k_1}(x,\alpha)\right]^2 dx + \int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}}^{\frac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}} \left[\chi_m^k(x,\alpha)\right]^2 dx =$$

$$= \int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}}^{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}} \left[\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\right]^2 dx +$$

$$+ \int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}}^{\frac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}} \left[\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\right]^2 dx =$$

$$= \frac{(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}} \cdot \frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]} +$$

$$+ \frac{k^{(1+\alpha)}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}} \cdot \frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{(1+\alpha)}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

т.е. соотношение (2) доказано.

Теперь покажем ортогональность системы при $m=1,\ \ k=1,2$. Для этого достаточно показать справедливость

$$\int_0^1 \chi_1^1(x,\alpha)\cdot\chi_1^2(x,\alpha)\,dx = 0. \qquad (4)$$

Действительно, по определению функций, произведение функций равно нулю, а именно, справедливо

$$\chi_1^1(x,\alpha)\cdot\chi_1^1(x,\alpha) = \left[\sqrt{\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2}}\cdot 0 + \left(-\sqrt{\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2\left(2^{1+\alpha}-1\right)}}\right)\cdot 0\right] +$$

$$+\left[0\cdot\sqrt{\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2}} + 0\cdot\left(-\sqrt{\frac{2^{2(1+\alpha)}}{2\left[2^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)\right]}}\right)\right] = 0,$$

поэтому,

$$\int_0^1 \chi_1^1(x,\alpha)\cdot\chi_1^2(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Отсюда, теорема для случая $m=1,\ \ k=1$ доказана. Рассмотрим слудующий случай.

Пусть $m>1$, $k=1,2,...,2^m$ и $n>m$. Сначала, предположим $n=m+1$. Тогда, если

$$2k-1 \le k' \le k\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)^{1+\alpha}+1\right]^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

то

$$\left(\frac{(k'-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}},\frac{(k')^{(1+\alpha)}}{2^{n(1+\alpha)}}\right)\subset\left(\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}},\frac{k^{(1+\alpha)}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}\right). \tag{5}$$

Отсюда

$$\chi_m^k(x,\alpha)\cdot\chi_{m+1}^{k'}(x,\alpha)=$$

$$=\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[(k'-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+(k')^{1+\alpha}\right]}}+$$

$$+\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\right).$$

Из последнего равенства

$$\int_0^1\left[\chi_m^k(x,\alpha)\cdot\chi_{m+1}^{k'}(x,\alpha)\right]dx=$$

$$=\int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}}^{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}}\left[\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[(k'-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+(k')^{1+\alpha}\right]}}\right]dx+$$

$$+\int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}}^{\frac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}}\left[\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\right)\right]dx=$$

$$=\left[\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[(k'-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+(k')^{1+\alpha}\right]}}\right]\cdot\left[\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}\right]+\left[\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[(k'-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+(k')^{1+\alpha}\right]}}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}-\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}\right]=0\,.$$

Для случая

$$1+k\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)^{1+\alpha}+1\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}\le k'\le 2k\,,$$

справедливо

$$\left(\frac{(k'-1)^{1+\alpha}}{2^{n(1+\alpha)}},\frac{(k')^{(1+\alpha)}}{2^{n(1+\alpha)}}\right)\subset\left(\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}},\frac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}\right). \qquad (6)$$

Тогда

$$\chi_m^k(x,\alpha)\cdot\chi_{m+1}^{k'}(x,\alpha)=$$

$$=\left(-\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[(k'-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+(k')^{1+\alpha}\right]}}+$$

$$+\left(-\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{2^{(m+2)(1+\alpha)}}{2\left[(k')^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k'-1)^{1+\alpha}\right]}}\right).$$

Из данного равенства получим

$$\int_0^1\left[\chi_m^k(x,\alpha)\cdot\chi_{m+1}^{k'}(x,\alpha)\right]dx=\int_0^1 0dx=0.$$

Если $n>m+1$. $k=1$ и $k'=1$, то

$$\left(0,\frac{1}{2^{n(1+\alpha)}}\right)\subset\left(0,\frac{1}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}\right),$$

а при $k'=2$

$$\left(\frac{1}{2^{n(1+\alpha)}},\frac{1}{2^{(n-1)(1+\alpha)}}\right)\subset\left(\frac{1}{2^{(m+1)(1+\alpha)}},\frac{1}{2^{m(1+\alpha)}}\right).$$

Поэтому, для случаев $k=1$, $k'=1$ и $k'=2$, а вместе с ними и для $k'>2$

$$\int_0^1\chi_m^1(x,\alpha)\cdot\chi_n^{k'}(x,\alpha)dx=0.$$

Пусть $n>m+1$, $k>1$. В этом случае, можно повторить рассуждения, приведенные выше.

Теорема 1 доказана полностью.

2 Разложение функции $f(x)=x^\beta$ по ортонормированной системе функций

Рассмотрим некоторое простое приложение введенной ортонормированной системы функций для практического разложения функции. Имеет место

Теорема 2. *Пусть даны числа* $\alpha>log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1$, $\beta>-1$ *и целое* $m\geq 1$. *Для функции* $f(x)=x^\beta$ *на промежутке* $(0;1]$ *имеет место следующее*

$$f(x)=\frac{1}{2^{(1+\alpha)(1+\beta)}(\beta+1)}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left[c_m^k(f,\beta,\alpha)_1+c_m^k(f,\beta,\alpha)_2\right]\chi_m^{(k)}, \qquad (7)$$

где,

$$c_m^k\left(f,\beta,\alpha\right)_1=\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[\left(k-1\right)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\frac{\left(\left(k-1\right)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{\beta+1}-\left[2\left(k-1\right)\right]^{(1+\alpha)(\beta+1)}}{2^{m(1+\alpha)(\beta+1)}},$$

$$c_m^k\left(f,\beta,\alpha\right)_2=\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-\left(k-1\right)^{1+\alpha}\right]}}\cdot\frac{\left(2k\right)^{(1+\alpha)(\beta+1)}-\left(\left(k-1\right)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{(\beta+1)}}{2^{m(\beta+1)(1+\alpha)}}.$$

Доказательство. Сначала рассмотим случай $m=1$, $k=1,2$. Определим коэффициенты разложения следующим образом

$$c_1^1\left(f,\beta,\alpha\right)=\int_0^{\frac{1}{2^{2(1+\alpha)}}}x^\beta\cdot\frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{2}}dx=$$

$$=\frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\cdot\left(\frac{1}{2^{2(1+\alpha)(1+\beta)}}\right)=\frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{2}\left(\beta+1\right)2^{2(1+\alpha)(1+\beta)}}$$

$$c_1^2\left(f,\beta,\alpha\right)=-\int_{\frac{1}{2^{2(1+\alpha)}}}^{\frac{1}{2^{(1+\alpha)}}}x^\beta\cdot\frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{2\left(2^{1+\alpha}-1\right)}}dx=$$

$$=-\frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{2\left(2^{1+\alpha}-1\right)}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\cdot\left(\frac{1}{2^{(1+\alpha)(1+\beta)}}-\frac{1}{2^{2(1+\alpha)(1+\beta)}}\right)=$$

$$=-\frac{2^{1+\alpha}\left(2^{(1+\alpha)(1+\beta)}-1\right)}{\sqrt{2\left(2^{(1+\alpha)(1+\beta)}-1\right)}\left(\beta+1\right)2^{2(1+\alpha)(1+\beta)}}.$$

Таким образом, при $m=1$, $k=1,2$

$$c_1^1\left(f,\beta,\alpha\right)=\frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{2}\left(\beta+1\right)2^{2(1+\alpha)(1+\beta)}}$$

и

$$c_1^2\left(f,\beta,\alpha\right)=-\frac{2^{1+\alpha}\left(2^{(1+\alpha)(1+\beta)}-1\right)}{\sqrt{2\left(2^{(1+\alpha)(1+\beta)}-1\right)}\left(\beta+1\right)2^{2(1+\alpha)(1+\beta)}}.$$

При $m>1$, $k=1,2,...,2^m$, имеем

$$c_m^k\left(f,\beta,\alpha\right)_1=\int_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}}^{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}}x^\beta\cdot\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[\left(k-1\right)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{\left((k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{\beta+1}}{2^{(m+1)(1+\alpha)(\beta+1)}}-\frac{(k-1)^{(1+\alpha)(\beta+1)}}{2^{m(1+\alpha)(\beta+1)}}\right].$$

$$c_m^k(f,\beta,\alpha)_2=-\int\limits_{\frac{(k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}}{2^{(m+1)(1+\alpha)}}}^{\frac{k^{1+\alpha}}{2^{m(1+\alpha)}}}\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\cdot x^{\beta}dx=$$

$$=-\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{k^{(1+\alpha)(\beta+1)}}{2^{m(\beta+1)(1+\alpha)}}-\frac{\left((k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{(\beta+1)}}{2^{(m+1)(1+\alpha)(\beta+1)}}\right].$$

Отсюда, при $m>1$, $k=1,2,...,2^m$

$$c_m^k(f,\beta,\alpha)_1=\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\times$$

$$\times\frac{1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{\left((k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{\beta+1}}{2^{(m+1)(1+\alpha)(\beta+1)}}-\frac{(k-1)^{(1+\alpha)(\beta+1)}}{2^{m(1+\alpha)(\beta+1)}}\right]$$

и

$$c_m^k(f,\beta,\alpha)_2=-\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-(k-1)^{1+\alpha}\right]}}\times$$

$$\times\frac{1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{k^{(1+\alpha)(\beta+1)}}{2^{m(\beta+1)(1+\alpha)}}-\frac{\left((k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{(\beta+1)}}{2^{(m+1)(1+\alpha)(\beta+1)}}\right].$$

Таким образом, коэффициенты разложения будут иметь вид

$$c(\alpha,\beta)=\frac{1}{2^{(1+\alpha)(1+\beta)}(\beta+1)}$$

и

$$c_m^k(f,\beta,\alpha)=c_m^k(f,\beta,\alpha)_1+c_m^k(f,\beta,\alpha)_2=$$

$$=\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[(k-1)^{1+\alpha}\left(1-2^{1+\alpha}\right)+k^{1+\alpha}\right]}}\cdot\frac{\left((k-1)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{\beta+1}-\left[2(k-1)\right]^{(1+\alpha)(\beta+1)}}{2^{m(1+\alpha)(\beta+1)}}-$$

$$-\sqrt{\frac{2^{(m+1)(1+\alpha)}}{2\left[k^{1+\alpha}\left(2^{1+\alpha}-1\right)-\left(k-1\right)^{1+\alpha}\right]}}\cdot\frac{\left(2k\right)^{(1+\alpha)(\beta+1)}-\left(\left(k-1\right)^{1+\alpha}+k^{1+\alpha}\right)^{(\beta+1)}}{2^{m(\beta+1)(1+\alpha)}}.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Список литературы

1. Андриенко В.А. О необходимых условиях вложения классов функций H_p^{ω} // Мат. сборник, 1969, 78, № 2, С.280-300.

2. Айдосов Е.Ж. О соотношениях между между модулем непрерывности и наилучшими приближениями функции по системе Хаара в разных метриках // ИАН Каз ССР. сер. физ. мат., 1987, №5, С.3-7.

3. Кудайбергенов С.С. О вложении классов функций, определяемыз посредством наилучших приближений по системам Франклина, Хаара и Уолша: Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 Алма – Ата, 1989.-112с.

4. Малоземов В.Н., Машарский С.М. Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов// Проблемы передачи информации, 2000, Т.36, Вып. 2, стр. 27-37.

5. Nguyen Xuan Ky. Some embedding theorems concerning the moduli of Ditzian and Totik //Analysis Math.,1993,V.19, P.255-265.

6 Сулейменов К., Темиргалиев Н. Критерий вложения $H_{\alpha,p}^{\omega}$ в пространства Лоренца// Analysis Math., 2006, №32, С.283-317.

7 Темиргалиев Н. О вложении в некоторые пространства Лоренца// Изв. вузов, 1980, 217, №6, С. 83-85.

8. Ульянов П.Л. О вложении некоторых классов функций // Мат. заметки, 1967, 1, №4, С.405-414.

Рецензенты:

Адамов А.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Математического и компьютерного моделирования» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г.Астана;

Тусупов Ж.А., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Информационные системы» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г.Астана.

Лубенцов В.Ф., д.т.н., профессор, зам.директора по научной работе, профессор кафедры «Информационные системы, Электропривод и автоматика», Невинномысский технологический институт ГОУ ВПО «Северо-Кавказский государственный технический университет», г.Невинномысск.