

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАССИВНЫХ ПРОВОДНИКОВ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОКАХ

Носов Г.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», Томск, Россия (634050, Томск, ГСП пр. Ленина, 30), e-mail: nosov@tpu.ru

Предложена методика для аналитического определения эквивалентных параметров массивных проводников с учетом поверхностного эффекта и нагрева в установившемся режиме при периодических токах, которая может использоваться для инженерного расчета обмоток электрических машин, трансформаторов и устройств индукционного нагрева, а также шинопроводов электропитания разнообразных электроэнергетических установок. Периодический ток представляется в виде постоянной составляющей и отдельных гармоник, а поверхностный эффект учитывается от действия этих гармоник при диффузии их электромагнитных полей в проводящее полупространство. При этом определяются такие эквивалентные параметры массивных проводников как толщина скин-слоя и его температура, сопротивление и внутренняя индуктивность. Эти параметры зависят от удельной проводимости и магнитной проницаемости, частоты первой гармоники, постоянной составляющей и действующих значений гармоник тока, периметра и площади поперечного сечения, температурного коэффициента и теплообмена с окружающей средой.

Ключевые слова: толщина скин-слоя, массивный проводник, магнитная проницаемость, удельная проводимость, температура, сопротивление, индуктивность

## DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF MASSIVE CONDUCTORS AT PERIODICALLY CURRENTS

Nosov G.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia (634050, Tomsk, Lenin Prospect, 30), e-mail: nosov@tpu.ru

The method proposed for the analytical determination the equivalent parameter of massive conductors with regard of skin effect and heating in the steady state at periodically currents, which can be used for engineering calculations windings of electrical machines, transformers and induction heating devices, as well as various electric power busbar systems. Periodic current is represented as a constant component and individual harmonics, and skin effect is taken into account by the actions of these harmonics with their diffusion of electromagnetic fields in the conducting half space. It identifies the equivalent parameters of massive conductors such as thickness of the skin layer and its temperature, resistance and internal inductance. These parameters depend on the conductivity and permeability, the frequency of the first harmonic component, constant component and valid values of current harmonics, perimeter and cross-sectional area, temperature coefficient and heat transfer with the environment.

Key words: the thickness of the skin layer, massive conductor, the magnetic permeability, conductivity, temperature, resistance, inductance

Расчет многих электротехнических устройств предполагает необходимость учета поверхностного эффекта в массивных проводниках в установившемся режиме при периодических токах. В этих устройствах массивными проводниками могут быть обмотки электрических машин, трансформаторов и устройств индукционного нагрева, а также шинопроводы электропитания разнообразных электроэнергетических установок.

Учет поверхностного эффекта существенно упрощается с использованием таких эквивалентных параметров массивных проводников как глубина проникновения электромагнитного поля в проводник (толщина скин-слоя) и его температура, сопротивление и внутренняя индуктивность [1–6].

Поэтому расчет эквивалентных параметров массивных проводников с учетом поверхностного эффекта и нагрева в установившемся режиме при периодических токах представляется актуальной задачей.

Цель данной работы заключается в получении аналитических формул для инженерного расчета эквивалентных параметров массивных проводников с учетом их нагрева в установившемся режиме.

### Допущения

Для получения расчетных формул сделаем следующие допущения.

1. Вся толщина проводника характеризуется постоянными значениями температуры  $\theta$  ( $^{\circ}\text{C}$ ), магнитной проницаемости  $\mu$  (Гн/м) и удельной проводимости  $\gamma$  (1/Ом·м), причем [6]:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \alpha[\theta - \theta_0]}, \quad (1)$$

где  $\gamma_0$  – удельная проводимость при температуре окружающей среды  $\theta_0$  ( $^{\circ}\text{C}$ );

$\alpha$  – постоянный температурный коэффициент ( $1/^{\circ}\text{C}$ ).

2. Растекание тока вдоль проводника (краевой эффект) и влияние соседних проводников с токами (эффект близости) учитывать не будем, считая при этом, что площадь поперечного сечения проводника  $S_0$  ( $\text{м}^2$ ) и его внешний периметр  $\Pi_0$  (м) постоянны.

3. Коэффициент теплообмена поверхности проводника с окружающей средой  $\beta$  [ $\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C})$ ] неизменен и определяется условиями теплоотвода благодаря конвекции и теплоизлучению [6].

4. Размеры массивных проводников и радиусы кривизны их поверхности существенно превосходят глубину проникновения в них электромагнитного поля, изменяющегося с частотой  $f$ , поэтому будем исходить из представления о плоской одномерной электромагнитной волне, проникающей в проводящее полупространство перпендикулярно его поверхности и полностью затухающей в его теле [1, 5].

### Методика расчета

В самом общем случае периодический ток в проводнике может быть представлен так [3]:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (2)$$

при активной потребляемой мощности

$$P = I_0^2 R_0 + \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k, \quad (3)$$

где  $R_0$  и  $R_k$  – активные сопротивления массивного проводника постоянной составляющей  $I_0$  и  $k$ -гармонике тока соответственно;

$I_k$  – действующее значение  $k$ -гармоники тока;

$n$  – число учитываемых гармоник.

При этом для инженерных вычислений может быть использован метод эквивалентных синусоид [4], когда ток и напряжение, записанные в виде:

$$\begin{aligned} i(t) &\approx I_0 + \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_1); \\ u(t) &\approx I_0 R_0 + \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

отражают результирующее энергетическое воздействие тока (2) на проводник, характеризуемое активной мощностью:

$$P = I_0^2 R_0 + UI \cos \varphi = I_0^2 R_0 + I^2 R, \quad (5)$$

и следующими действующими значениями эквивалентных синусоид:

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^n I_k^2}; \quad U = I \sqrt{R^2 + \omega^2 (L_0 + L)^2}, \quad (6)$$

где  $R$  и  $L$  – активное сопротивление и внутренняя индуктивность проводника эквивалентной синусоиде тока;

$L_0$  – индуктивность внешнего магнитного поля;

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота эквивалентной синусоиды (первой гармоники) тока.

Для метода эквивалентных синусоид были бы удобны аналитические выражения для эквивалентных параметров массивных проводников  $R_0$ ,  $R$  и  $L$ , учитывающие поверхностный эффект и нагрев проводника, а также гармонический состав тока. Для этого подобно синусоидальному режиму [1, 2, 5] запишем для несинусоидального тока (2):

$$R_0 = \frac{l_0}{\gamma S_0}; \quad R = \frac{l_0}{\gamma \Delta_R \Pi_0}; \quad L = \frac{\mu l_0 \Delta_L}{\Pi_0}, \quad (7)$$

где  $l_0$  – длина проводника;

$\Delta_R$  и  $\Delta_L$  – эквивалентная толщина скин-слоя для эквивалентной синусоиды тока и для её магнитной энергии соответственно.

При этом для первой гармоники тока с угловой частотой  $\omega$  активное сопротивление и внутренняя индуктивность согласно (7) и [1, 2, 5] составят:

$$R_1 = \frac{l_0}{\gamma \Delta \Pi_0}; \quad L_1 = \frac{\mu l_0 \Delta}{2 \Pi_0}, \quad (8)$$

где  $\Delta = \sqrt{2/\mu \gamma \omega}$  – эквивалентная глубина проникновения в проводник как проводящее полупространство первой гармоники тока.

Очевидно, при увеличении угловой частоты в  $k$ -раз эти величины для гармоник тока составят

$$R_k = \sqrt{k} R_1; L_k = L_1 / \sqrt{k}. \quad (9)$$

Далее воспользуемся активной и реактивной мощностью для эквивалентной синусоиды тока

$$P_{\dot{Y}} = I^2 R; Q_{\dot{Y}} = I^2 \omega L, \quad (10)$$

которые на основании (3, 5, 8, 9) представим так

$$P_{\dot{Y}} = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k = \sum_{k=1}^n I_k^2 \sqrt{k} R_1; \quad (11)$$

$$Q_{\dot{Y}} = \sum_{k=1}^n I_k^2 k \omega L_k = \sum_{k=1}^n I_k^2 \sqrt{k} \omega L_1.$$

С учетом выражений (6, 7, 8, 10, 11) имеем

$$\Delta_R = \Delta / N; \Delta_L = N \Delta / 2, \quad (12)$$

где через  $N$  обозначен безразмерный параметр:

$$N = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k} I_k^2}{I^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k} I_k^2}{\sum_{k=1}^n I_k^2}. \quad (13)$$

Из соотношения (13) нетрудно заметить, что  $N \geq 1$ , причем этот параметр тем больше, чем существеннее несинусоидальность тока. Величина  $N$  не зависит от начальных фаз гармоник тока, а определяется лишь их действующими значениями. При этом из выражений (12) следует, что чем заметнее несинусоидальность, тем меньше эквивалентная толщина скин-слоя для эквивалентной синусоиды тока  $\Delta_R$  и больше эквивалентная толщина скин-слоя для её магнитной энергии  $\Delta_L$ . Однако, как и для синусоидального тока выполняется известное равенство для проводящего полупространства [5]:

$$R = \omega L = N \frac{l_0}{\Pi_0} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\gamma}},$$

т.е. с увеличением несинусоидальности одинаково возрастают активное и индуктивное сопротивления массивного проводника.

Для определения температуры проводника  $\theta$  воспользуемся уравнением теплового баланса [6]:

$$P = I_0^2 R_0 + I^2 R = l_0 \Pi_0 \beta (\theta - \theta_0) \quad (14)$$

и соотношениями (1, 3, 5, 6, 7, 12, 13), на основании которых при коэффициенте теплообмена

$$\beta > \frac{\alpha I_0^2}{\gamma_0 \Pi_0 S_0} \quad (15)$$

получаем установившуюся температуру проводника

$$\theta = \theta_0 + \frac{X^2 \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4Y(Y - I_0^2)}{X^2}} \right]}{2\alpha(Y - I_0^2)^2} + \frac{I_0^2}{\alpha(Y - I_0^2)} \quad (16)$$

при расчетных параметрах

$$X = \frac{I^2 N S_0}{\Delta_0 \Pi_0}; \quad Y = \frac{\gamma_0 \beta \Pi_0 S_0}{\alpha} \quad (17)$$

и эквивалентной глубине проникновения в проводник первой гармоники тока при температуре проводника, равной температуре окружающей среды  $\theta_0$ :

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma_0 \omega}}. \quad (18)$$

### Результаты расчета

По формулам (1–18) для периодических токов с амплитудой  $I_m = 2 \cdot 10^4$  (А) и периодом  $T$  проведены расчеты эквивалентных параметров массивного проводника из отожженной меди с параметрами [6, 7]:  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (Гн/м);  $\theta_0 = 20$  (°C);  $\gamma_0 = 58 \cdot 10^6$  (См/м);  $\alpha = 0,0043$  (1/°C);  $\beta = 20$  [Вт/(м<sup>2</sup> °C)];  $l_0 = 1$  (м);  $\Pi_0 = 0,4$  (м);  $S_0 = 0,01$  (м<sup>2</sup>);  $f = 50$  (Гц);  $T = 1/f = 0,02$  (с);  $\omega \approx 314$  (1/с);  $\Delta_0 \approx 9,35$  (мм).

1. При переменном токе (рис. 1)

$$i(t) = I_0 + (I_m - I_0) \sin(\omega t + \psi)$$

и  $N=1$  результаты расчета приведены в табл. 1.

2. Для тока в виде однополярных прямоугольных периодических импульсов длительностью  $\tau$  (рис. 2) при скважности

$$q = T/\tau$$

и постоянной составляющей

$$I_0 = I_m/q,$$

для действующих значений гармоник [3]

$$I_k = \frac{I_m \sqrt{1 - \cos(2\pi k/q)}}{\pi k}$$

и  $k = 1, 2, \dots, 500$  результаты расчета приведены в табл. 2.

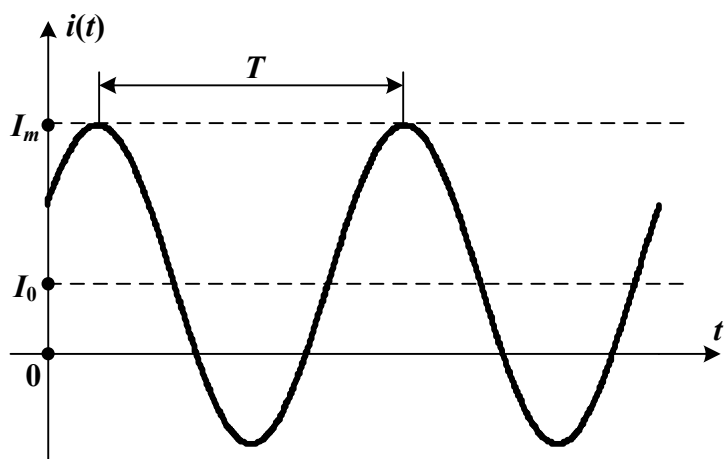


Рис. 1. Переменный ток:  $I_m$  – амплитуда;  $I_0$  – постоянная составляющая;  $T$  – период

Таблица 1

Параметры массивного проводника из отожженной меди при переменном токе с амплитудой

$I_m = 2 \cdot 10^4$  (А), при частоте  $f = 50$  (Гц) и  $N=1$

$I_0/I_m$	–	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,999
$\theta$	°С	167	112	85	80	99	157
$\gamma/\gamma_0$	–	0,612	0,717	0,783	0,796	0,746	0,630
$\Delta_R$	мм	11,95	11,04	10,56	10,48	10,82	11,77
$\Delta_L$	мм	5,97	5,52	5,28	5,24	5,41	5,88
$R_0$	мкОм	2,82	2,41	2,20	2,17	2,31	2,74
$R$	мкОм	5,90	5,45	5,21	5,17	5,34	5,81
$L$	мкГн	0,019	0,017	0,017	0,016	0,017	0,018

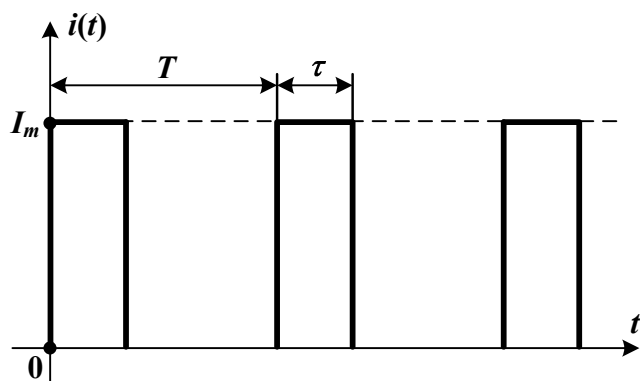


Рис. 2. Однополярные прямоугольные периодические импульсы тока:  $\tau$  – длительность импульсов

Таблица 2

Параметры массивного проводника из отожженной меди при однополярных прямоугольных периодических импульсах тока с амплитудой  $I_m = 2 \cdot 10^4$  (А) и при частоте  $f = 50$  (Гц)

$q$	–	32	16	8	4	2	1,02
$I_0/I_m$	–	0,031	0,063	0,125	0,250	0,500	0,980
$N$	–	3,429	2,542	1,919	1,511	1,334	4,205
$\theta$	°С	45	57	75	103	149	186
$\gamma/\gamma_0$	–	0,903	0,862	0,808	0,736	0,643	0,583
$\Delta_R$	мм	2,87	3,96	5,42	7,209	8,74	2,91
$\Delta_L$	мм	16,87	12,80	9,98	8,231	7,77	25,73
$R_0$	мкОм	1,91	2,00	2,14	2,34	2,68	2,96
$R$	мкОм	16,65	12,63	9,85	8,12	7,67	25,40
$L$	мкГн	0,053	0,040	0,031	0,026	0,024	0,081

### Заключение

1. Предложена методика для аналитического определения эквивалентных параметров массивных проводников с учетом поверхностного эффекта и нагрева в установившемся режиме при периодических токах, которая может использоваться для инженерного расчета обмоток электрических машин, трансформаторов и устройств индукционного нагрева, а также шинопроводов электропитания разнообразных электроэнергетических установок.

2. Температура массивного проводника, эквивалентная толщина скин-слоя для эквивалентной синусоиды тока и для её магнитной энергии, сопротивление и внутренняя индуктивность зависят от удельной проводимости и магнитной проницаемости, частоты первой гармоники, постоянной составляющей и действующих значений гармоник тока, периметра и площади поперечного сечения, температурного коэффициента и теплообмена с окружающей средой.

3. Разработанная методика может использоваться для расчета эквивалентных параметров неферромагнитных и ферромагнитных массивных проводников при постоянной магнитной проницаемости и периодических токах любой формы, в том числе и синусоидальной.

### Список литературы

1. Немков, В.С. Теория и расчет устройств индукционного нагрева / В.С. Немков, В.Б. Демидович. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 280 с.

2. Носов, Г.В. Эквивалентные параметры скин-слоя массивных проводников: расчет и анализ / Г.В. Носов // Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 195 с.
3. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 1. – 463 с.
4. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 2. – 576 с.
5. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 3. – 377 с.
6. Теория электрических аппаратов / под ред. Г.Н. Александрова. – М.: Высшая школа, 1985. – 312 с.
7. Электротехнический справочник / под общ. ред. проф. МЭИ В.Г. Герасимова и др. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – Т. 1. – 488 с.

**Рецензенты:**

Усов Ю.П., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГАОУ ВО НИ ТПУ, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск;

Канев Ф.Ю., д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник института оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, г. Томск.