УДК 519.48/62-50

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ ПО СКОЛЬЗЯЩЕЙ ВЫБОРКЕ ПОСТОЯННОГО ОБЪЁМА

Крицына Н.А.

Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Москва, Россия (115409, г. Москва, Каширское ш., 31. e-mail: nakritsyna@mephi.ru)

Решается задача идентификации параметров нестационарного линейного временного ряда. Предложен алгоритм оценки параметров регрессионной-авто-регрессионной модели по скользящей выборке постоянного объема, который представляет собой модификацию известной рекуррентной формы метода наименьших квадратов. Метод позволяет не только проводить оценивание параметров модели в режиме «on-line», но и обеспечивает оценивание на основе наиболее «свежих» данных, что особенно важно при решении задач идентификации нестационарных объектов. Это достигается за счет последовательного рекуррентного удаления «устаревшей» информации и рекуррентной процедуры оценки на основе новой информации об «объекте». Приведен подробный алгоритм процедуры идентификации, основанный на предлагаемом подходе и позволяющий в режиме реального времени проводить оценку медленно меняющихся параметров линейного динамического «объекта», одной из разновидностей которого является нестационарный временной ряд.

Ключевые слова: алгоритм, идентификация, временной ряд, рекуррентная форма, регрессионно-авто-регрессионная модель, оценивание параметров модели, нестационарный объект.

EVALUATION OF THE PARAMETERS OF INFORMATION TRAFFICS ON THE SLIDING SAMPLE OF A CONSTANT VOLUME

Kritsyna N.A.

National Research Nuclear University (MEPHI), Moscow, Russia (115409, Moscow, Kashirskoye shosse 31), e-mail: nakritsyna@mephi.ru

The problem of identification of non-stationary linear time series parameters is solved. An algorithm for estimation of parameters of the regressive-autoregressive model by moving a constant volume sampling is proposed, which is a modification of the well-known recurrent form of the least squares method. The method not only allows estimation of model parameters on-line, but provides estimation on the basis of the latest data, which is particularly important for solving the problems of identification of non-stationary objects. This is achieved by means of serial recurrent deletion of «outdated» information and recurrent estimation procedure based on the new information about the «object». The detailed algorithm of the identification procedure is given, based on the proposed approach and allowing on-line estimation of slowly varying parameters of the linear dynamic «object», one of variation of which is non-stationary time series.

Keywords: algorithm, identification, time series, regressive-auto-regressive model, recurrent form, estimation of model parameters, non-stationary objects.

При решении широкого круга задач представления данных в виде формализованной модели, в частности такой моделью может быть временной ряд, возникают вопросы, непосредственно связанные с идентификацией параметров модели процесса в режиме реального времени. В этом случае идентификация осуществляется на основе последовательно поступающих данных. В данной работе в качестве идентифицируемого объекта используется процесс, модель которого может быть представлена линейным временным рядом в виде регрессионно-авто-регрессионного объекта:

$$y(i)+\sum_{j=1}^{n}a_j y(i-j)=\sum_{j=0}^{n}b_j u(i-j)+\sum_{j=0}^{n}d_j \eta(i-j).$$

Учитывая, что оценивание параметров регрессионного–авто–регрессионного объекта (РАР–объект), частным случаем которого является временной ряд [1], осуществляется на основе последовательно поступающих данных, наиболее привлекательными методами оценивания параметров являются рекуррентные методы оценивания [2, 5]. Основной недостаток традиционного рекуррентного подхода состоит в том, что вне зависимости от времени поступления вся накопленная информация участвует в процедуре оценивания с одинаковыми весами. Очевидно, даже при медленно меряющихся параметрах, такой подход не приемлем. Хорошо известный в настоящее время метод экспоненциального взвешивания не дает желаемых результатов, так как обладает высокой чувствительностью к выбору весового коэффициента, учитывающего степень «старения» информации. Применение методов стохастической динамической фильтрации сопряжено с необходимостью использования дополнительной информации о динамике изменения параметров временного ряда, а также информации о статистических характеристиках шумов, действующих в идентифицируемой системе. В этой связи имеет смысл рассмотреть рекуррентный алгоритм, основанный на использовании только последних N измерений.

В настоящей работе предлагается рекуррентный алгоритм оценивания параметров линейного РАР – объекта по скользящей выборке заданного объема.

Пусть РАР – объект представлен в дискретно-разностной форме

$$y(i)+\sum_{j=1}^{n}a_j y(i-j)=\sum_{j=0}^{n}b_j u(i-j)+\sum_{j=0}^{n}d_j \eta(i-j),$$ где

$y(i), u(i)$ – значения «выхода» и «входа» идентифицируемого объекта в момент времени i, параметры объекта $a_{j,}\, b_j, d_j, (\overline{0,1})$ – подлежат идентификации, шум $\eta(i)$ имеет следующие статистические характеристики [3]:

$M\{\eta(i)\}=0$, $\operatorname{cov}\{\eta(i)\eta(j)\}=\sigma_\eta^2(i)\delta_{\text{к}}(i-j)$, $\delta_{\text{к}}$ — символ Кронекера.

Оптимальная настраиваемая модель [4], обеспечивающая несмещенные, состоятельные в средне – квадратичном оценки параметров РАР–объекта имеет вид [3]:

$$\tilde{y}(i)=-\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j y(i-j)+\sum_{j=0}^{n}\tilde{b}_j u(i-j)+\sum_{j=1}^{n}(\tilde{d}_l/\tilde{d}_0)[y(i-j)-\tilde{y}(i-j)].$$

Введем вектор наблюдений «входа» модели

$$\bar{z}^{\text{т}}(i)=(-y(i-1),\ldots,-y(i-n),u(i),\ldots,u(i-n),\ y(i-1)-\tilde{y}(i-1),\ldots,y(i-n)-\tilde{y}(i-n))$$

и вектор оценок параметров

$$\tilde{\bar{c}}^{\text{т}}=\left(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_n,\tilde{b}_0,\ldots,\tilde{b}_n,\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_0},\ldots,\frac{\tilde{d}_n}{\tilde{d}_0}\right).$$

Тогда уравнение модели можно переписать в векторной форме:

$$\tilde{y}(i) = \bar{z}^{\mathrm{T}}(i)\tilde{\tilde{c}}\,.$$

Как отмечено выше, будем искать оценку параметров по N ($N \geq (n+(n+1)+n)$) последним измерениям. Причем, на каждом шаге рекуррентного процесса добавляется l новых измерений, а l старых выводятся из процесса идентификации.

Тогда на $k = \mathrm{int}(i/l)$ шаге процесса идентификации матрица «входов» $U(k)$ может быть представлена в виде блочного объединения двух матриц:

–$U_0(k)$ – матрицы размерности $[(l)$ x $(n+(n+1)+n)]$, которая будет удалена на следующем $k+1$ шаге процесса идентификации;

– $U_1(k)$ – матрицы размерности $[(N-l)$ x $(n+(n+1)+n)]$, которая будет сохранена на следующем $k+1$ шаге процесса идентификации.

Таким образом, матрица $U(k)$ имеет блочный вид

$$U(k) = \begin{bmatrix} U_0(k) \\ U_1(k) \end{bmatrix},$$

очевидно, размерность этой матрицы будет $[(N)$ *на* $(n+(n+1)+n)]$.

С другой стороны, матрица «входов» $U(k+1)$ на шаге $k+1$ также может быть представлена в виде объединения двух матриц:

– $U_2(k+1)= U_1(k)$ – матрицы размерности $[(N-l)$ x $(n+(n+1)+n)]$, которая сохранена с предыдущего k-того шага процесса идентификации;

– $U_3(k+1)$ – матрицы размерности $[(l)$ x $(n+(n+1)+n)]$, которая будет добавлена на $k+1$ шаге процесса идентификации.

В результате матрица $U(k+1)$ будет иметь вид

$$U(k+1) = \begin{bmatrix} U_2(k+1) \\ U_3(k+1) \end{bmatrix} \text{ или } U(k+1) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_3(k+1) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Строками матриц $U_0(k), U_1(k), U_2(k+1), U_3(k+1)$ являются транспонированные вектора $\bar{z}^{\mathrm{T}}$ в соответствующие моменты времени.

Аналогичным образом можно сформировать блочные вектора «выхода» на k и $k+1$ шагах процесса идентификации:

$$\bar{y}(k) = \begin{bmatrix} \bar{y}_0(k) \\ \bar{y}_1(k) \end{bmatrix} \text{ и } \bar{y}(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(k) \\ \bar{y}_3(k+1) \end{bmatrix}$$

Вектора «выхода» $\bar{y}_0(k), \bar{y}_1(k),\ \bar{y}_3(k+1)$ имеют тот же смысл, что и соответствующие матрицы «входа».

Как известно [2,3], при использовании метода наименьших квадратов оценка параметров линейного объекта по N измерениям, с учетом введенных обозначений, на k-том и $k+1$-ом шагах процесса идентификации будет иметь вид:

$$\hat{\bar{c}}_{ls}(k) = (U(k)^{\text{т}} R(k) U(k))^{-1} U(k)^{\text{т}} R(k) \bar{y}(k)\,; \tag{2}$$

$$\hat{\bar{c}}_{ls}(k+1) = (U(k+1)^{\text{т}} R(k+1) U(k+1))^{-1} U(k+1)^{\text{т}} R(k+1) \bar{y}(k+1)\,, \tag{3}$$

Введем вспомогательную оценку $\hat{\bar{c}}^{*}_{ls}(k+1)$, вычисленную на основе матрицы «входа» $U_1(k)$ и вектора «выхода» $\bar{y}_1(k)$

$$\hat{\bar{c}}^{*}_{ls}(k+1) = (U_1(k)^{\text{т}} R_1(k) U_1(k))^{-1} U_1(k)^{\text{т}} R_1(k) \bar{y}_1(k)\,. \tag{4}$$

$R(k)$, $R(k+1)$, $R_1(k+1)$ – матрицы весовых коэффициентов соответствующих размерностей. Естественно, для существования единственности решения необходимо выполнение условия $N - l \ge 3n + 1$.

Обозначим

$$U^{\text{т}}(k) R(k) U(k) = P^{-1}(k)\,;$$
$$U^{\text{т}}(k) R(k) \bar{y}(k) = \bar{q}(k)\,;$$
$$U^{\text{т}}(k+1) R(k+1) U(k+1) = P^{-1}(k+1)\,;$$
$$U^{\text{т}}(k+1) R(k+1) \bar{y}(k+1) = \bar{q}(k+1)\,;$$
$$U_1^{\text{т}}(k) R_1(k) U_1(k) = P^{*-1}(k)\,;$$
$$U_1^{\text{т}}(k) R_1(k) \bar{y}_1(k) = \bar{q}^{*}(k).$$

Используя эти обозначения, формулы для оценок (2), (3), (4) можно записать в виде:

$$\hat{\bar{c}}_{ls}(k) = P(k)\bar{q}(k)\,; \tag{5.а}$$

$$\hat{\bar{c}}_{ls}(k+1) = P(k+1)\bar{q}(k+1)\,; \tag{5.б}$$

$$\hat{\bar{c}}^{*}_{ls}(k) = P^{*}(k)\bar{q}^{*}(k). \tag{5.в}$$

Учитывая, что матрицы $U^{\text{т}}(k)$, $R(k)$ и вектор $\bar{y}(k)$ являются блочными, и, осуществляя несложные матричные преобразования, можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$P^{*-1}(k) = P^{-1}(k) - U_0^{\text{т}}(k) R_0(k) U_0(k) \tag{6.а}$$

$$\bar{q}^{*}(k) = \bar{q}(k) - U_0^{\text{т}}(k) R_0(k) \bar{y}_0(k) \tag{6.б}$$

или, используя соотношения (5а), последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\bar{q}^{*}(k) = P(k)^{-1}\hat{\bar{c}}_{ls}(k) - U_0^{\text{т}}(k) R_0(k) \bar{y}_0(k). \tag{7}$$

Применяя известное матричное тождество для обращаемых матриц [2], выражение для матрицы $P^{*}(k+1)$ можно записать в виде:

$$P^{*}(k) = P(k) + P(k) U_0^{\text{т}}(k) [R_0^{-1}(k) - U_0(k) P(k) U_0^{\text{т}}(k)]^{-1} U_0(k) P(k)\,. \tag{8}$$

Подставляя выражения (7) и (8) в формулу (5в) и произведя элементарные матричные преобразования, получим рекуррентную формулу для вспомогательной оценки

$$\hat{\tilde{c}}_{ls}^{*}(k)=\hat{\tilde{c}}_{ls}(k)-P(k)U_0^{\mathrm{т}}(k)[R_0^{-1}(k)-U_0(k)P(k)U_0^{\mathrm{т}}(k)]^{-1}(\bar{y}_0(k)-U_0(k)\hat{\tilde{c}}_{ls}(k)). \qquad (9)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для матрицы $P(k+1)$ и вектора $\hat{\tilde{c}}_{ls}(k+1)$, получим:

$$P(k+1)=P^{*}(k)-P^{*}(k)U_3^{\mathrm{т}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1)+U_3(k+1)P^{*}(k)U_3^{\mathrm{т}}(k+1)]^{-1}U_3(k+1)P*(k), \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{c}}_{ls}(k+1)=\hat{\tilde{c}}_{ls}^{*}(k)+P^{*}(k)U_3^{\mathrm{т}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1)+\\ +U_3(k+1)P^{*}(k)U_3^{\mathrm{т}}(k+1)]^{-1}(\bar{y}_3(k+1)-U_3(k+1)\hat{\tilde{c}}_{ls}^{*}(k)).\end{aligned} \qquad (11)$$

Для задания начальных значений $\hat{\tilde{c}}_{ls}(0), P\ (0)$ можно воспользоваться обычной формой метода наименьших квадратов при достаточном объеме «входных» и «выходных» параметров с использованием упрощенной модели «объекта» идентификации.

Ниже приведен двухступенчатый алгоритм расчета оценок параметров $\hat{\tilde{c}}_{ls}(k+1)$. При формировании алгоритма полагали, что коррекция результатов расчета производится на каждом шаге измерительного процесса, т.е. *l=1* (в этом случае номер рекуррентного процесса *k* совпадает с номером измерений *i*, пересчет оценок происходит при каждом новом поступлении данных). В дальнейшем при формировании алгоритма, в зависимости от контекста, будем использовать либо индекс *i*, либо индекс *k*. Кроме того, как уже отмечалось, необходимым условием единственности оценки является условие: $N-l\geq 3n+1$.

Алгоритм

1. *Задание начальных значений* $\hat{\tilde{c}}_{ls}(0), P\ (0)$.

Так как значения «выхода» модели пока неизвестны, то принимаем упрощенный вид модели:

$$\tilde{y}(i)=-\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j y(i-j)+\sum_{j=0}^{n}\tilde{b}_r u(i-j);\quad \tilde{y}(i)=\bar{z}^{\mathrm{т}}(i)\tilde{\tilde{c}};\quad \tilde{\tilde{c}}^{\mathrm{т}}=\left(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n,\tilde{b}_0,...,\tilde{b}_n\right);$$

$$\bar{z}^{\mathrm{т}}(i)=(-y(i-1),...,-y(i-n),u(i),...,u(i-n));\quad \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_0}=0,...,\frac{\tilde{d}_n}{\tilde{d}_0}=0;$$

очевидно, в данном случае имеем *2n+1* оцениваемых параметра. Следовательно, для задания начальных условий достаточно накопить *2n+1* последовательных значений «входа» и «выхода».

1.1. Формируем матрицу «входов» U^0 и вектор «выходов» $\bar{y}^0$, *i=[-2n, -2n+1,…,0]*,

$$U^0=\begin{bmatrix}\bar{z}^{\mathrm{т}}(-2n)\\ ....\\ \bar{z}^{\mathrm{т}}(0)\end{bmatrix},\quad \bar{y}^0=\begin{bmatrix}y(-2n)\\ .....\\ y(0)\end{bmatrix}.$$

1.2. рассчитываем начальные значения оценок:

$$\hat{\bar{c}}_{ls}(0)=(U^0)^{-1}\bar{y}^0\,,\quad P^{-1}(0)=U^{0\,\mathrm{T}}U^0\,;$$

2. *Определение оценок параметров по упрощенной модели,* $k=i=\left[\overline{0,\, n}\right]$.

2.1. Формируем матрицу «входа» и вектор «выхода», используем при этом упрощенный вид модели: $U_3(i+1)=\bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)$, а $\bar{y}_3(i+1)=\bar{y}(i+1)$.

2.2. Рассчитываем оценку $\hat{\bar{c}}_{ls}(k+1)$ и матрицу $P(k+1)$:

$$\hat{\bar{c}}_{ls}(k+1)=\hat{\bar{c}}_{ls}(k)+P(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1)+$$
$$+U_3(k+1)P(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)]^{-1}(\bar{y}_3(k+1)-U_3(k+1)\hat{\bar{c}}_{ls}(k));$$

$$P(k+1)=P(k)-P\;(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)[R_3^{-1}(k+1)+$$
$$+U_3(k+1)P(k)U_3^{\mathrm{T}}(k+1)]^{-1}U_3(k+1)P(k).$$

2.3. Рассчитываем значения «выхода» модели, используя её упрощенный вид. Расчет осуществляется по формуле: $\hat{y}(i+1)=\bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)\hat{\bar{c}}(k+1),$

эти значения запоминаются.

2.4. Для $(i,\, k)<n$ выполняем рекурсию $i=i+1,\;\; k=k+1$ и переходим к п.2.1

3. *Определение оценок параметров оптимальной настраиваемой модели для моментов* $n\le(i,k)<N-1$. На этом интервале можем использовать полный вид оптимальной настраиваемой модели:

$$\tilde{y}(i)=-\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_j y(i-j)+\sum_{j=0}^{n}\tilde{b}_j u(i-j)+\sum_{j=1}^{n}(\tilde{d}_l/\tilde{d}_0)[y(i-j)-\tilde{y}(i-j)],$$

однако при этом еще не достигли заданного объема скользящей выборки.

3.1. Формируем матрицу «входа» и вектор «выхода», используем при этом полный вид модели:

$$U_3(k+1)=\bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)=(-y(i),...,-y(i-n),u(i+1),...,u(i-n),$$
$$(y(i)-\tilde{y}(i)),...,(y(i-n)-\tilde{y}(i-n))),$$

$\bar{y}_3(k+1)=\bar{y}(i+1)$.

3.2. Рассчитываем оценку $\hat{\bar{c}}_{ls}(k+1)$ и матрицу $P(k+1)$, используем при этом формулы, аналогичные приведенным в п. 2.2.

3.3. Рассчитываем значения «выхода» модели: $\hat{y}(i+1)=\bar{z}^{\mathrm{T}}(i+1)\hat{\bar{c}}(k+1),$

эти значения запоминаются.

3.4. Для $(i,k)<N-1$ выполняем рекурсию $i=i+1,\;\; k=k+1$ и переходим к п.3.1.

4. *Определение оценок параметров оптимальной настраиваемой модели для моментов* $(i,k)\ge N$, т.е. достигли заданного объема скользящей выборки.

4.1. Формируем матрицу «входа» $U_0(k)$ и вектор «выхода» $\bar{y}_0(k)$, которые должны быть выведены из процесса идентификации:

$U_0(k) = \bar{z}^{\text{т}}(i+1-N),\ \bar{y}_0(k) = \bar{y}(i+1-N)$.

4.2. Формируем промежуточные оценки параметра $\hat{\bar{c}}^*_{ls}(k)$ и матрицы $P^*(k)$:

$$\hat{\bar{c}}^*_{ls}(k) = \hat{\bar{c}}_{is}(k) - P(k)U_0{}^{\text{т}}(k)[R_0^{-1}(k) - U_0(k)P(k)U_0{}^{\text{т}}(k)]^{-1}(\bar{y}_0(k) - U_0(k)\hat{\bar{c}}_{ls}(k));$$

$$P^*(k) = P(k) + P(k)U_0{}^{\text{т}}(k)[R_0^{-1}(k) - U_0(k)P(k+1)U_0{}^{\text{т}}(k)]^{-1}U_0(k)P(k).$$

4.3. Формируем матрицу «входа» $U_3(k+1)$ и вектор «выхода» $\bar{y}_3(k+1)$, которые вводятся на текущем шаге в процесс идентификации:

$$U_3(k+1) = \bar{z}^{\text{т}}(i+1) = (-y(i),...,-y(i-n), u(i+1),...,u(i-n),$$
$$y(i) - \tilde{y}(i),..., y(i-n) - \tilde{y}(i-n))),$$
$$\bar{y}_3(k+1) = \bar{y}(i+1).$$

4.4. Рассчитываем оценку $\hat{\bar{c}}_{ls}(k+1)$ и матрицу $P(k+1)$, при этом используем формулы, аналогичные приведенным в п. 2.2.

4.5. Рассчитываем значения «выхода» модели: $\hat{y}(i+1) = \bar{z}^{\text{т}}(i+1)\hat{\bar{c}}(k+1)$,

эти значения запоминаются.

4.6. Пока поступают новые данные «входа» и «выхода» выполняем рекурсию $i = i+1,\ k = k+1$ и переходим к п.4.1.

5. *Конец алгоритма*

Очевидно, предлагаемый рекуррентный метод оценки параметров информационных потоков, представленных в виде числовых потоков, по скользящей выборке заданного объема не дает каких – либо преимуществ в плане точности оценки и объема хранимой информации по сравнению с обычной формой метода наименьших квадратов. Однако, использование предлагаемого метода дает возможность избежать кропотливой процедуры обращения матриц. Как известно, порядок обращаемой матрицы в МНК равен числу оцениваемых параметров. При использовании предлагаемого рекуррентного метода порядок обращаемой матрицы равен числу обновленных данных *l*. В случае, когда пересчет параметров происходит при каждом новом поступлении данных $(l = 1)$, обращаемая матрица вырождается в скаляр.

Таким образом, использование предлагаемой модификации рекуррентной формы метода наименьших квадратов для оценки параметров формализованной модели данных позволяет устранить трудоемкую процедуру обращения матриц, с одной стороны, и учесть нестационарный вид модели, с другой.

Список литературы

1. Бородакий Ю.В., Крицына Н.А., Кулябичев Ю.П., Шумилов Ю.Ю. Вероятностно-статистические методы обработки данных в информационных системах. М.: Радио и связь, 2003.
2. Сейдж Э, Мелс Дж. Теория оценивания и её применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
3. Тимохин С.Г., Болотская Т.М. Вероятностные основы кибернетики (основы теории вероятностей). М. МИФИ, 2006.
4. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1981.
5. Эйкхофф У. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1978.

Рецензенты:

Загребаев А.М., д.т.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет, г.Москва;

Кулябичев Ю.П., д.т.н., профессор, Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), г. Москва.