УДК 338.5.01

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЦЕНЫ С УЧЕТОМ СЕЗОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Емцева Е.Д.

«Владивостокский государственный университет экономики и сервиса», Владивосток, Россия (690014, г. Владивосток, ул. Гоголя 41), e-mail: emtseva@mail.ru

Данная работа посвящена изучению дискретной модели динамики цены, описываемой разностным уравнением, являющимся формализацией общепринятого закона Вальраса, согласно которого цена увеличивается при избыточном спросе и падает при избыточном предложении. Используя подходящие замены переменных и параметров, модель динамики цены сводится к уравнению Риккера, возникшему в математической биологии при изучении связи между запасом и пополнением рыбной популяции. Учитывая наличие на рынке периодической волатильности цены, например сезонной, в работе рассмотрена модель с периодически меняющимся параметром, характеризующим сезонные изменения спроса и предложения. Исследования проводились аналитическими и численными методами с использованием среды Delphi. Определены стационарные точки и области их устойчивости. На основании результатов численного эксперимента получены бифуркационные диаграммы для каждого сезона.

Ключевые слова: модель динамики цены, модель Риккера, динамическое моделирование, стационарная точка, устойчивость.

A MODEL OF DYNAMICS OF THE PRICE INTO ACCOUNT SEASONAL FLUCTUATIONS

Emtseva E.D.

"Vladivostok State University of Economics and Service", 41 Gogolya St., Vladivostok, 690014, Russia, e-mail: emtseva@mail.ru

This paper studies the discrete model of the dynamics of prices, described by the difference equation, is the formalization of customary law Walras, according to which the price is increased by excess demand and decreases at a surplus sentence. Using a suitable change of variables and parameters, the model of the dynamics of prices reduced to the equation Ricker arising in mathematical biology in studying the relationship between stock and replenishment of fish populations. Given the presence of a periodic volatility in the market prices, such as seasonal, in this paper we consider a model with a periodically varying parameter characterizing the seasonal changes in supply and demand. The studies were conducted by analytical and numerical methods using environment Delphi. Defined stationary points and their stability. Based on the results of numerical experiments obtained bifurcation diagrams for each season.

Keywords: dynamics model of price, Ricker model, dynamic modeling, stationary point, steadiness.

Цена и ценообразование являются одними из основных элементов рыночной экономики. Установление определенной цены на товар или услугу необходимо для последующей их продажи и получения прибыли. Стратегия и тактика ценообразования в значительной степени определяют коммерческую успешность любого производителя товаров или услуг. При этом при принятии управленческих решений приходится учитывать зависимость цены не только от экономических факторов, но и политических, и социальных, и психологических.

Важным моментом в этом процессе является учет сезонной волатильности, поскольку существует достаточно большое множество категорий товаров и услуг, цены на которые подвержены сезонным колебаниям. Так, хорошо известны сезонные особенности цен на рынке жилой недвижимости. В зависимости от времени года изменяются цены на сельскохозяйственную продукцию, одежду, обувь, автомобили, лекарственные средства, алкогольную продукцию, драгоценные металлы, нефть, туристические услуги, железнодорожные и авиабилеты и т.д. Периодические колебания цен могут возникать и на более длительных временных интервалах.

Целью данной работы является исследование нелинейной модели динамики цены, которая сводится к уравнению Риккера [3], возникшее в математической биологии для описания динамики численности популяции.

Идея применения биологических моделей в экономике представляется перспективной, шаги в этом направлении были предприняты, например, в работах [3,5,7].

Опишем динамику цены уравнением [3]

$$P_{n+1} = P_n e^{\beta(Q_{Dn} - Q_{Sn})}, \tag{1}$$

где $\beta > 0$ – параметр адаптации, характеризующий скорость реакции цены на дисбаланс рынка, Q_{Dn} и Q_{Sn} объемы спроса и предложения в период n.

Пусть объемы спроса и предложения выражаются формулами:

$$Q_{Dn} = a - bP_n, \tag{2}$$

$$Q_{Sn} = s + dP_n, \tag{3}$$

тогда уравнение (1) имеет вид

$$P_{n+1} = P_n e^{\beta((a-s)-(b+d)P_n)}. \tag{4}$$

Произведя замены

$x_n = \beta(b+d)P_n$, $A = e^{\beta(a-s)}$, приходим к уравнению Риккера [6]:

$$x_{n+1} = Ax_n e^{-x_n}. \tag{5}$$

Изменение динамического поведения модели (5) в зависимости от параметра достаточно хорошо изучено. Так, например, проведен анализ динамического поведения модели при учете колебаний параметра, характеризующего степень экологического лимитирования роста численности [2], подробно исследована задача оптимизации промысловых изъятий из риккеровских популяций при условии циклического изменения параметров [1,4].

В данной работе исследуется динамика цены, описываемая уравнением (5), при периодическом изменении параметра A в цикле длины два. Предположим, что параметр A изменяется периодически под влиянием сезонных изменений свободных переменных a и s в формулах спроса и предложения.

Учитывая указанные условия, получим модель динамики цены, описываемую следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = A_2 x_{n,2} e^{-x_{n,2}}, \\ x_{n+1,2} = A_1 x_{n+1,1} e^{-x_{n+1,1}}, \end{cases} \qquad (6)$$

где $A_i > 0$.

Или

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = A_1 A_2 x_{n,1} e^{-x_{n,1}(1+A_1 e^{-x_{n,1}})}, \\ x_{n+1,2} = A_1 A_2 x_{n,2} e^{-x_{n,2}(1+A_2 e^{-x_{n,2}})}. \end{cases} \qquad (7)$$

В связи с симметричностью уравнений системы относительно параметров, рассмотрим одно из уравнений, например,

$$x_{n+1,1} = A_1 A_2 x_{n,1} e^{-x_{n,1}(1+A_1 e^{-x_{n,1}})}. \qquad (8)$$

Стационарные точки x находим из уравнения

$$x = A_1 A_2 x e^{-x(1+A_1 e^{-x})}: \qquad (9)$$

$\bar{x} = 0$ или $1 = A_1 A_2 e^{-\bar{x}(1+A_1 e^{-\bar{x}})}$.

Вопрос об устойчивости равновесных значений рассматривается методом исследования производной правой части (9). Положение равновесия является локально устойчивым в случае, когда отклонения, возможно достаточно малые, от этого положения с течением времени убывают, и неустойчивыми, когда эти отклонения возрастают. Для гладкой функции $F(x)$ используем следующий критерий устойчивости неподвижной точки $\bar{x}$ уравнения $x_{n+1} = F(x_n)$: неподвижная точка $\bar{x}$ устойчива, если $|F'(\bar{x})| < 1$, и неустойчива, если $|F'(\bar{x})| > 1$.

Таким образом, в области $A_1 A_2 < 1$, имеем единственную неподвижную точку $\bar{x} = 0$, являющуюся глобально устойчивым положением равновесия.

При $A_1 A_2 > 1$ нулевое положение равновесия неустойчиво. Характер устойчивости нетривиальной неподвижной точки уравнения (8), для которого $F(x) = A_1 A_2 x e^{-x(1+A_1 e^{-x})}$, можно определить из решения соответствующих неравенств.

1) В случае если $0 < A_1 A_2 \bar{x} e^{-\bar{x}(1+A_1 e^{-\bar{x}})}(1-\bar{x})(1-A_1 \bar{x} e^{-\bar{x}}) < 1$, неподвижная точка $\bar{x}$ устойчивая, переход к равновесию происходит монотонно.
2) Если $-1 < A_1 A_2 \bar{x} e^{-\bar{x}(1+A_1 e^{-\bar{x}})}(1-\bar{x})(1-A_1 \bar{x} e^{-\bar{x}}) < 0$, то неподвижная точка $\bar{x}$ устойчивая, переход к равновесию происходит путем затухающих колебаний.

3) Если $A_1 A_2 \bar{x} e^{-\bar{x}(1+A_1 e^{-\bar{x}})}(1-\bar{x})(1-A_1 \bar{x} e^{-\bar{x}}) < -1$, то неподвижная точка $\bar{x}$ неустойчивая, отход от которой происходит путем расходящихся колебаний.

4) В случае если $A_1 A_2 \bar{x} e^{-\bar{x}(1+A_1 e^{-\bar{x}})}(1-\bar{x})(1-A_1 \bar{x} e^{-\bar{x}}) > 1$ неподвижная точка $\bar{x}$ неустойчивая, отход от которой осуществляется монотонно.

Для нетривиальной неподвижной точки $\bar{x}$, удовлетворяющей уравнению (9) производная имеет вид $F'(\bar{x}) = (1-\bar{x})(1-\ln A_1 A_2 + \bar{x})$.

Отметим следующие результаты аналитических исследований устойчивости нетривиальной неподвижной точки $\bar{x}$ в области $A_1 A_2 > 1$.

При $0 < \ln A_1 A_2 < 1$ $\bar{x}$ - устойчивая, более того, переход к равновесию происходит монотонно, причем $0 < \bar{x} < 1$.

Если $1 < \ln A_1 A_2 < 2$, то $\bar{x}$ - устойчивая неподвижная точка, переход к равновесию происходит монотонно при $\ln A_1 A_2 - 1 < \bar{x} < 1$ и путем затухающих колебаний при $\bar{x} > 1$.

Если $2 < \ln A_1 A_2 < 4$, то $\bar{x}$ - устойчивое состояние переход к равновесию происходит монотонно при $1 < \bar{x} < \ln A_1 A_2 - 1$.

Если $\ln A_1 A_2 > 4$, то при выполнении условия $\frac{\ln A_1 A_2 - \sqrt{nA_1 A_2 (nA_1 A_2 - 4)}}{4} < \bar{x} < \frac{\ln A_1 A_2 + \sqrt{nA_1 A_2 (nA_1 A_2 - 4)}}{4}$, нетривиальное стационарное состояние является устойчивым с монотонным переходом.

Численные методы позволяют сделать выводы о наличие циклов и характере их устойчивости. Бифуркационные диаграммы, построенные для каждого периода в трехмерном пространстве в зависимости от параметров, а также сечения бифуркационной диаграммы плоскостями постоянных значений одного из параметров, иллюстрируют влияние параметров спроса, предложения и адаптации на сезонное изменение динамики цены. Анализ бифуркационных диаграмм, классификация их сечений требуют дополнительных исследований, подробное описание которых предполагается изложить в следующих работах по предложенной теме.

Сделанные на основании полученных результатов численных и аналитических исследований выводы имеют определенный экономический интерес и могут быть использованы при изучении динамики цены, описываемой предложенной моделью.

Список литературы

1. Е. В. Ашихмина, Ю. Г. Израильский, Е. Я. Фрисман. Оптимизации промысла популяций, описываемых уравнением Риккера, при циклическом изменении имитирующих рост численности факторов среды, Дальневост. матем. журн., 4:1 (2003), 127–133
2. Е. В. Ашихмина, Ю. Г. Израильский, Е. Я. Фрисман. Динамическое поведение модели Риккера при циклическом изменении одного из параметров // Вестник ДВО РАН. 2004. № 5.19-28.
3. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. Введение и анализ одномерных моделей. Учебное пособие / В.А. Дыхта. – Иркутск: Издательство БГУЭиП, 2003. - 178 с.
4. Емцева Е.Д., Фрисман Е.Я. Оптимизация промысла для популяции при периодическом изменении внешних условий // Дальневосточный математический сборник. – 2003. –Т. 4, №.2. – С.304-315
5. Емцева Е.Д., Солодухин К.С. Модель роста капитала в условиях неопределенности // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6.
6. Риккер У.У. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. М.: Пищ. пром–сть, 1979. 137 с.
7. Царьков В.А. О динамике Ферхюльста и динамике роста капитала в экономике // Экономика и математические методы. – 2008. – № 44 (3). – 92-97.

Рецензенты:

Солодухин К.С., д.э.н., профессор, профессор кафедры математики и моделирования, ФГБОУ «Владивостокский государственный университет экономики и сервиса», г. Владивосток;

Мазелис Л.С., д.э.н., заведующий кафедрой математики и моделирования, ФГБОУ «Владивостокский государственный университет экономики и сервиса», г. Владивосток.