

## СИНТЕЗ ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА РОБОТИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ НА ОСНОВЕ $H_\infty$ -ОПТИМИЗАЦИИ

Черкашин Н.Н.<sup>1</sup>, Гапоненко Е.В.<sup>1</sup>, Мамаев Ю.А.<sup>1</sup>, Малышев Д.И.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, [nick11112@yandex.ru](mailto:nick11112@yandex.ru)

Рассмотрена задача построения цифрового регулятора состояний для управления роботизированной платформой, включающей приводной механизм с шаговым электродвигателем, при низкочастотных воздействиях со стороны основания. Задача решается методами теории пространства состояний и  $H_\infty$ -оптимизации. Представлены исследования динамических характеристик при дискретном входном сигнале. Определены передаточные функции, описывающие влияние напряжений на якоре на скорость поступательного движения механизма и на угловую скорость вращения вала двигателя. Дан пример синтеза оптимального регулятора и алгоритм решения дискретного уравнения Риккати, получена матрица коэффициентов обратных связей. Найдена структура управления по обратным связям. Представлены результаты математического моделирования и оценки эффективности схемы электромеханического привода и алгоритма управления.

Ключевые слова: роботизированная платформа,  $H_\infty$ -бесконечность, акселерометры, шаговый двигатель, уравнение Риккати.

## SYNTHESIS OF DIGITAL REGULATOR ROBOTIC PLATFORM BASED ON $H_\infty$ -OPTIMIZATION

Cherkashin N.N.<sup>1</sup>, Gaponenko E.V.<sup>1</sup>, Mamaev Y.A.<sup>1</sup>, Malyshev D.I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belgorod State technological university of V.G.Shukhov, [nick11112@yandex.ru](mailto:nick11112@yandex.ru)

Consider the problem constructing digital controller states to control a robotic platform consisting of actuator with stepper motor, with low-frequency effects from the base. The problem is solved using the theory of the state space and  $H_\infty$ - optimization. Presented study the dynamic characteristics of a discrete input. Defined transfer functions describing the effect of armature voltage on the speed of the translational motion of the mechanism and the angular velocity of rotation of the motor shaft. An example of the synthesis of optimal control and algorithms for solving discrete Riccati equation, the coefficient matrix obtained feedbacks. The structure of the feedback control. The results of mathematical modeling and evaluating the effectiveness of the scheme electro-mechanical drive and control algorithm.

Keywords: robotic platform,  $H_\infty$ -infinity, accelerometers, stepper motor, Riccati equation.

Рассмотрим роботизированную платформу, предназначенную для защиты технологических объектов, а также человека-оператора от низкочастотных воздействий со стороны основания. При этом поставим обратную робототехническую задачу: при любых случайных воздействиях со стороны подвижного основания построить такой закон управления приводным механизмом, при котором объект (платформа) является неподвижным в инерциальной системе координат. При этом необходимо рассмотреть вопросы выбора схем и конструкций приводов и типа датчиков, а также синтеза системы управления.

В качестве привода будем рассматривать электромеханический исполнительный механизм (рис.1), который является наиболее простым по своему конструктивному исполнению и эксплуатационным характеристикам.[1] Кроме того, он обеспечивает большие относительные перемещения, порядка десятка сантиметров и возможность эксплуатации в неблагоприятных средах. Частотный диапазон работы определяется, главным образом, частотным диапазоном

используемого электродвигателя. В качестве датчиков обратных связей используем акселерометры, установленные на объекте и основании, и датчик относительного перемещения.[2]

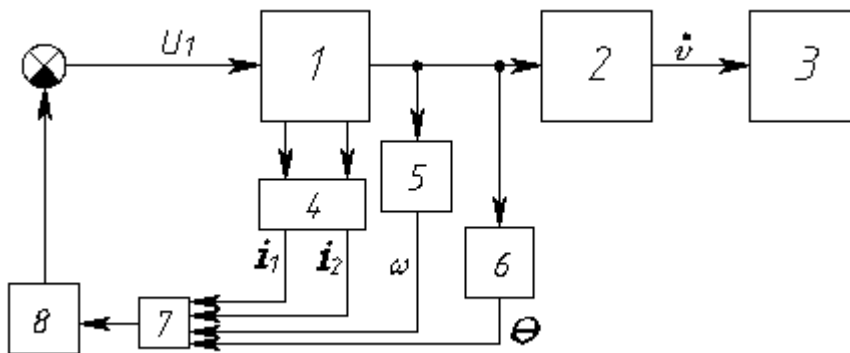


Рис. 1. Система с электромеханическим исполнительным механизмом с шарико-винтовой парой: 1 — электродвигатель; 2 — шарико-винтовая пара; 3 — объект виброзащиты; 4 — датчик тока; 5 — датчик скорости; 6 — датчик положения; 7 — регулятор; 8 — усилитель мощности.

Построим математическую модель привода. В винтовой шариковой паре модель передачи скоростей и момента описывается уравнениями:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{S \cdot n} \cdot \dot{v}; \quad (1)$$

где  $S$  - шаг резьбы,  $n$  - число заходов резьбы,  $\omega$  - скорость вращения якоря двигателя,  $v$  - перемещение основания[3]

Рассмотрим двухфазный шаговый электродвигатель с активным неявнополюсным ротором. Примем за начало отсчета угла  $\theta$  положение, при котором ось полюса ротора совпадает с осью фазы 1. При этом

$$L_{11} = L_{22} = L = const; \quad L_{33} = L = const; \quad L_{12} = 0; \quad L_{23} = M \cos \theta; \quad L_{13} = M \sin \theta; \quad r_1 = r_2 = r$$

Запишем уравнения напряжений и момента

$$\frac{J}{p} \cdot \ddot{\theta} + M_H = p \cdot \psi_m \cdot (i_1 \cos \theta - i_2 \sin \theta); \quad (2)$$

$$r_1 \cdot i_1 + L \cdot \dot{i}_1 + \psi_m \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = u_1; \quad (3)$$

$$r_2 \cdot i_2 + L \cdot \dot{i}_2 - \psi_m \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = u_2; \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \omega; \quad (5)$$

где  $M_H$  - момент нагрузки,  $J$  - момент инерции ротора двигателя,  $i_1, r_1, u_1$  - ток, сопротивление и напряжение 1-й фазы двигателя,  $i_2, r_2, u_2$  - ток, сопротивление и напряжение 2-й фазы двигателя,  $\theta$  - угол между осью полюсов и вектором н. с.,  $p$  - число пар полюсов,  $\psi_m$  - максимальное потокосцепление возбужденного ротора с одной фазой статора,  $L$  - коэффициент взаимоиנדукции,  $\omega$  - угловая скорость

Из уравнений 1- 5 получена система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{p} \cdot \ddot{\theta} + M_H = p \cdot \psi_m \cdot (i_1 \cos \theta - i_2 \sin \theta), \\ r_1 \cdot i_1 + L \cdot \dot{i}_1 + \psi_m \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = u_1, \\ r_2 \cdot i_2 + L \cdot \dot{i}_2 - \psi_m \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = u_2, \\ \dot{\theta} = \frac{2 \cdot \pi}{S \cdot n} \cdot \dot{\nu}, \end{array} \right. \quad (6)$$

Упростим уравнения (6), приняв угол  $\theta$  близким к нулю (при этом  $\cos \theta \approx 1$ , а  $\sin \theta \approx 0$ ), а затем приведем их к виду, характерному для уравнений, описывающих систему в пространстве состояний, приняв

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{J_{\text{экв}}} = \frac{p^2 \cdot \psi_m}{J}, \quad S_{\text{экв}} = \frac{S \cdot n}{2 \cdot \pi} \\ \dot{i}_1 = -\frac{r_1 \cdot i_1}{L} - \frac{\psi_m}{L} \cdot \dot{\theta} + \frac{u_1}{L}, \\ \dot{i}_2 = -\frac{r_2 \cdot i_2}{L} + \frac{u_2}{L}, \\ \ddot{\theta} = \frac{i_1}{J_{\text{экв}}} - \frac{p}{J} \cdot M_H, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\dot{\nu} = S_{\text{экв}} \cdot \dot{\theta}.$$

Введем 4 переменные состояния:  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i_2$ ,  $x_3 = \theta$  и  $x_4 = \dot{x}_3$ . Система уравнений (7)

примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{r_1}{L} \cdot x_1 - \frac{\psi_m}{L} \cdot x_4 + \frac{1}{L} \cdot u_1, \\ \dot{x}_2 = -\frac{r_2}{L} \cdot x_2 + \frac{1}{L} \cdot u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{J_{\text{экв}}} \cdot x_1 - \frac{p}{J} \cdot M_H \\ \dot{\nu} = S_{\text{экв}} \cdot x_4. \end{array} \right. \quad (8)$$

или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} + D\mathbf{Y};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \dot{\nu} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \end{array} \right. \quad (9)$$

где  $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  - вектор состояния,  $\mathbf{Y} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  - вектор возмущающего

воздействия,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{L} & 0 & 0 & -\frac{\psi_m}{L} \\ 0 & -\frac{r_2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{J_{\text{экв}}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  и  $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{p}{J} \cdot M_H \end{bmatrix}$  - матрицы коэффициентов си-

стемы,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ 0 \ 0]^T$  - вектор входных сигналов,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 1 \\ L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  - коэффициент входных

сигналов,  $\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ S_{\text{экв}}]$  - вектор-строка входных сигналов.

Исследование динамических свойств исполнительного механизма при дискретном входном сигнале

Работа шагового двигателя осуществляется в результате подачи на вход импульсов напряжения. В связи с этим переведем первое уравнение системы уравнений 9 в дискретную форму.

В результате получим

$$\mathbf{X}[i+1] = \mathbf{A}_{\Delta} \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_{\Delta} \mathbf{u}[i] + D_{\Delta} \mathbf{Y}[i]; \quad (12)$$

$$\nu[i+1] = \mathbf{C}_{\Delta} \mathbf{X}[i],$$

где  $\mathbf{A}_{\Delta} = \exp(\mathbf{A}T) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^i}{i!}$ ;  $\mathbf{B}_{\Delta} = \left( \int_0^T \exp(\mathbf{A}T) dt \right) \cdot \mathbf{B} = \left( \mathbf{I}T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right) \cdot \mathbf{B}$ ;

$$\mathbf{C}_{\Delta} = \mathbf{C} \cdot \left( \int_0^T \exp(\mathbf{A}T) dt \right) = \mathbf{C} \cdot \left( \mathbf{I}T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right) \quad (13)$$

В матричном уравнении (12) символы  $\mathbf{A}_{\Delta}$ ,  $\mathbf{B}_{\Delta}$ ,  $\mathbf{C}_{\Delta}$  и  $D_{\Delta}$  обозначают аналоги матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $D$  для дискретной системы, а символ  $T$  введён для обозначения периода дискретизации. Ввиду большой сложности математических выкладок представляется нецелесообразным выводить общий вид матриц  $\mathbf{A}_{\Delta}$ ,  $\mathbf{B}_{\Delta}$ ,  $\mathbf{C}_{\Delta}$  и  $D_{\Delta}$ . Удобнее рассчитывать матрицы  $\mathbf{A}_{\Delta}$ ,  $\mathbf{B}_{\Delta}$ ,  $\mathbf{C}_{\Delta}$  и  $D_{\Delta}$  в числовом виде для каждой конкретной четверки матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $D$ .

Перейдём к передаточной функции, описывающей влияние напряжений на якоре  $u$  на скорость поступательного движения механизма  $\dot{v}$

$$W_{u-\dot{v}}(z) = \frac{\dot{v}(z)}{u(z)} = \mathbf{C}_{\Delta} \Phi(z) \mathbf{B}_{\Delta} \quad (14)$$

где  $\Phi(z) = (zI - A_{\Delta})^{-1}$  - переходная матрица состояния.

Из уравнения (14) может быть выражена передаточная функция, описывающая влияние напряжений на якоре  $u$  на угловую скорость вращения вала двигателя  $\omega$

$$W_{u-\omega}(z) = \frac{\omega_{об}(z)}{u(z)} = \frac{2 \cdot \pi}{S \cdot n} \cdot W_{u-\dot{v}}(z) \quad (15)$$

Исходя из требований, предъявляемых к системе, и рекомендаций по расчёту винтовой шариковой передачи, составим таблицу исходных технических данных для расчёта винтовой шариковой передачи (табл.1).

В качестве примера рассмотрим шаговый электродвигатель FL20STH, имеющий следующие технические характеристики (табл. 2).

Таблица 1

Исходные технические данные для расчета винтовой шариковой передачи

| № п/п | Наименование характеристики и обозначение | Единица измерения | Значение |
|-------|---|-------------------|----------|
| 1.    | Шаг резьбы                                | —                 | 2        |
| 2.    | Число заходов резьбы, $n$                 | —                 | 5        |

Таблица 2

Технические данные шагового двигателя FL20STH

| № п/п | Наименование характеристики и обозначение   | Единица измерения | Значение           |
|-------|---|-------------------|--------------------|
| 1.    | Мощность электродвигателя номинальная, P  | Вт                |                    |
| 2.    | Напряжение якоря номинальное, Uном  | В                 |                    |
| 3.    | Момент нагрузки, Мном   | кг·м              | $18 \cdot 10^{-4}$ |
| 4.    | Момент инерции ротора, J  | кг·м <sup>2</sup> | $9 \cdot 10^{-7}$  |
| 5.    | Число пар полюсов, p  |                   | 4                  |
| 6.    | Максимальное потокосцепление возбужденного ротора с одной фазой статора, $\Psi_m$ |                   | $5 \cdot 10^{-4}$  |
| 7.    | Сопротивление фазы двигателя, $r_1, r_2$  | Ом                | 5,6                |
| 8.    | Индуктивность якоря, L  | Гн                | 0,42               |

После проведения соответствующих вычислений получаем передаточную функцию

$$W_{u-\omega} = \frac{108,5 \cdot (1 - 453z)}{(z - 0,46)(z + 0,03) + 0,014} \quad (16)$$

Для нашей системы (12) найдем управление

$$u = K \cdot X \quad (17)$$

которое минимизирует[4]

$$J \doteq \sup_{\omega} \|y\|_2^2 \quad (18)$$

Введем во второе уравнение системы (12) управление  $u$ . Сделано это для ограничения величины используемого управления, т.к. в противном случае можно добиться сколь угодно маленького значения  $J$  с помощью достаточно больших  $u$ . Система (12) примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{X}[i+1] = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}[i] + D_\Delta \mathbf{Y}[i]; \\ v[i+1] = \mathbf{C}_\Delta \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_{1\Delta} \mathbf{u}[i], \end{cases} \quad (19)$$

Как известно

$$J = \|H(s)\|_\infty^2, \quad (20)$$

где  $H(S) = (C_\Delta + B_{1\Delta}K)(sz - A_\Delta + BK)^{-1}D$  – передаточная функция замкнутой системы от возмущения  $\omega$  к выходу  $y$ , т.е. минимизация  $J$  эквивалентна задаче  $H_\infty$ -оптимизации.[5]

Преобразуем предварительно  $\|y\|_2^2$

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty (C_\Delta \cdot x + B_{1\Delta} \cdot u)^T (C_\Delta \cdot x + B_{1\Delta} \cdot u) dt = \int_0^\infty (x^T \cdot C_\Delta^T \cdot C_\Delta \cdot x + 2 \cdot u^T \cdot B_{1\Delta}^T \cdot C_\Delta x + u^T \cdot B_{1\Delta}^T \cdot B_{1\Delta} \cdot u) dt \quad (21)$$

Предположим для простоты выкладок, что  $B_{1\Delta}^T C_\Delta = 0$ , тогда смешанное произведение отсутствует

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty (x^T \cdot C_\Delta^T \cdot C_\Delta \cdot x + u^T \cdot S \cdot u) dt \quad (22)$$

где

$$S = B_{1\Delta}^T \cdot B_{1\Delta} \quad (23)$$

Таким образом задача записывается так

$$\dot{x} = A_C x + D_\Delta y, \quad \|y\|_2^2 \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad A_C = A_\Delta + B_\Delta K \quad (24)$$

$$J = \int_0^\infty x^T R x dt, \quad \text{где } R = C_\Delta^T C_\Delta + K^T S K \quad (25)$$

Если неравенство

$$A_C^T P + P A_C + \frac{1}{\gamma^2} P D_\Delta D_\Delta^T P + R \leq 0 \quad (26)$$

имеет решение  $P > 0$ , то  $J \leq \gamma^2$ .

Умножим неравенство (20) слева и справа на  $Q = P^{-1}$

$$Q(A_\Delta + B_\Delta K)^T + (A_\Delta + B_\Delta K)Q + \frac{1}{\gamma^2} D_\Delta D_\Delta^T + Q C_\Delta^T C_\Delta Q + Q K^T S K Q \leq 0 \quad (27)$$

и сделаем замену  $Y = K \cdot Q$

$$QA_{\Delta}^T + A_{\Delta}Q + QC_{\Delta}^T C_{\Delta}Q + Y^T B_{\Delta}^T + B_{\Delta}Y + Y^T SY + \frac{1}{\gamma^2} D_{\Delta} D_{\Delta}^T \leq 0 \quad (28)$$

Преобразуем члены, зависящие от Y

$$Y^T B_{\Delta}^T + B_{\Delta}Y + Y^T SY = (S^{1/2}Y + S^{-1/2}B_{\Delta}^T)^T (S^{1/2}Y + S^{-1/2}B_{\Delta}^T) - B_{\Delta}S^{-1}B_{\Delta}^T \geq -B_{\Delta}S^{-1}B_{\Delta}^T \quad (29)$$

причем равенство достигается при  $Y = -S^{-1}B_{\Delta}^T$ .

Неравенство (23) выполняется при некоторых  $Q>0$ , Y тогда и только тогда, когда выполняется неравенство относительно  $Q>0$

$$QA_{\Delta}^T + A_{\Delta}Q + QC_{\Delta}^T C_{\Delta}Q - B_{\Delta}S^{-1}B_{\Delta}^T + \frac{1}{\gamma^2} D_{\Delta} D_{\Delta}^T \leq 0 \quad (30)$$

В свою очередь он имеет положительно-определенное решение  $Q>0$ , если такое решение имеет уравнение Рикатти, полученное заменой неравенства на равенство. По этому решению восстанавливаем соответствующий стабилизирующий регулятор

$$K = YQ^{-1} = -S^{-1}B_{\Delta}^T Q^{-1} \quad (31)$$

Матрицы **A**, **B** и **D** уравнения (12) для такой системы будут следующими:

$$A = \begin{bmatrix} -13,3 & 0 & 0 & -0,0012 \\ 0 & -13,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8,9 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2,38 \\ 2,38 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 0 \ 2,936]$$

Перейдя к дискретной задаче, приняв период дискретизации  $T = 0,01$ с, получим следующие матрицы **A**<sub>Δ</sub>, **B**<sub>Δ</sub>, **C**<sub>Δ</sub> уравнения (12):

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,35 & 0 & 0 & -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 1,6 \cdot 10^{-10} & 0 \\ -4,4 \cdot 10^3 & 0 & 10^{-4} & 1,3 \cdot 10^{-4} \\ 3,7 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 5,2 \end{bmatrix}, B_{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,84 \\ 3,86 \\ 1,04 \cdot 10^4 \\ 8,8 \cdot 10^3 \end{bmatrix}, B_{1\Delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\Delta} = [1,1 \cdot 10^4 \ 0 \ 0 \ 15,3], D_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Установим следующие значения весовых коэффициентов:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, r = 10^{-6}$$

После выполнения процедуры нахождения коэффициентов обратных связей оптимального регулятора была получена матрица коэффициентов обратных связей

$$K = [0,0984; \ 0; \ 0,0001; \ 0,0001]$$





3. Погонин А.А., М.С. Чепчуров, А.В. Хуртасенко. Нестационарный станочный модуль с адаптивной системой управления// Известия высших учебных заведений. Строительство.- 2008.-№2.-С.72-75.
4. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. Издательство «Наука», Москва, 1972. 768 стр.
5. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П.С. Щербаков.— М.: Наука, 2002.— 303 с.

**Рецензены:**

Погонин А.А., д.т.н., профессор кафедры технологии машиностроения ФГБОУ ВПО Белгородского государственного технологического университета, г. Белгород;

Пелипенко Н.А., д.т.н., профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета, г. Белгород.

Сведения об авторах.

ФИО: Черкашин Николай Николаевич

Ученая степень нет

Место работы: Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

Занимаемая должность: аспирант

Домашний адрес: 308013 Белгород, ул. Почтовая 50б, кв. 57

Служебный адрес: 308012 Белгород, ул. Костюкова 46

Телефон: 8-920-206-95-61

e-mail: nick11112@yandex.ru

ФИО: Гапоненко Елена Владимировна

Ученая степень нет

Место работы: Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

Занимаемая должность: ассистент кафедры

Домашний адрес: 308027 Белгород, ул. Железнодорожная д. 123, кв. 35

Служебный адрес: 308012 Белгород, ул. Костюкова 46

Телефон: 8-915-523-63-05

e-mail: lena-gap1987@mail.ru

ФИО: Мамаев Юрий Александрович

Ученая степень нет

Место работы: Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

Занимаемая должность: младший научный сотрудник

Домашний адрес: 308000 Белгород, ул. 50-летия Белгородской области д.  
14, кв. 89

Служебный адрес: 308012 Белгород, ул. Костюкова 46

Телефон: 8-960-636-73-60

e-mail: mamaev-bel@yandex.ru

ФИО: Малышев Дмитрий Иванович

Ученая степень нет

Место работы: Белгородский государственный технологический универси-  
тет им. В.Г. Шухова

Занимаемая должность: студент

Домашний адрес: 308012 Белгород, ул. Красноармейская 23

Служебный адрес: 308012 Белгород, ул. Костюкова 46

Телефон: 8-950-713-43-97

e-mail: Dimon-belgorod@yandex.ru