УДК 681.518.54

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ: НЕЧЕТКИЙ ПОДХОД

Волков Ю.Д.[1]

[1]ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева», Саранск, Россия (430904, Саранск, ул. Российская, 5), e-mail: volkov57@rambler.ru

Рассмотрена задача оптимизации эксперимента в условиях неопределенности на примере технических систем. Представлены два подхода к определению неопределенности, вероятностный и нечеткий. Дан анализ моделей эксперимента. На ранних этапах эксперимента целесообразно использовать нечеткую модель активного эксперимента в пространстве состояний. Проведена фаззификация задачи эксперимента с использованием нечетких *FN*-чисел. Для математической модели обработки неопределенности, появляющейся при измерении (оценке) параметров, предлагается арифметика *FN*-чисел. Введен показатель энергетической цены, который учитывает полную мощность экспериментальной установки и временные затраты на проведение эксперимента в оценочной функции общего вида. Процедура поиска с использованием оценочной функции обладает свойствами алгоритма Харта, Нильсона и Рафаэля, что дает реальный выигрыш в объеме перебора. В результате снижаются энергозатраты и осуществляется контроль за точностью обработки данных на всех этапах эксперимента.

Ключевые слова: задача эксперимента, неопределенность, нечеткая модель, оптимизация по энергозатратам.

OPTIMIZATION OF EXPERIMENT ON ENERGY CONSUMPTION: FUZZY APPROACH

Volkov Y.D.[1]

[1]Ogarev Mordovia State University (MordSU), Russia, Saransk (5 Rossiyskaya Street, Saransk 430904, Russia), e-mail: volkov57@rambler.ru

The problem of the experiment optimization under conditions of uncertainty is given on the example of technical systems. Two approaches to the determination of uncertainty, probabilistic and fuzzy are presented. The experiment models are analyzed. In the early stages of the experiment, it is advisable to use a fuzzy model of active experiment in the state space. The fuzzification task of the experiment on the base of fuzzy *FN*-numbers is performed. The arithmetic of *FN*-numbers is proposed for the mathematical model to handle uncertainty appearing in the measurement (assessment) parameters. The rate of energy prices, which takes into account the full capacity of the experimental setup and the time required to conduct the experiment in the evaluation function of the general form, is given. The search procedure using the evaluation function has the properties of the algorithm of Hart, Nilsson and Raphael, which gives a real benefit in the amount of brute force. As a result, the energy consumption is reduced and the accuracy of the data in all stages of the experiment is monitored.

Keywords: task of experiment, uncertainty, fuzzy model, energy cost optimization.

При проведении эксперимента в технических системах на ранних стадиях одной из проблем является целенаправленное управление в условиях неопределенности, связанной, в частности, с возможностями измерений и случайным характером процессов [1]. Растущие требования к точности результатов удовлетворяются не только за счет применения прецизионных приборов, но и путем использования методов мягких вычислений и измерений [1,2]. Неопределенность измерения состоит из двух компонент, названных в [5] неопределенностью категории А и В. Если к А относят объективные вероятностные оценки ряда измерений, то при поиске компонентов категории В возможно использование субъективных знаний, формализованных с применением теории нечетких множеств [1,3].

Алгоритм управления экспериментом должен обеспечивать наиболее выгодный компромисс между качеством решения и стоимостной эффективностью со следующими ограничениями: $t_j \in [0,T]$, $E_j \le E_{\max}$, $q_j \in Q$, $j \in \{1, h\}$, где t_j, E_j - время и энергозатраты j -эксперимента. Для заполнения пробела в области структуризованной неопределенности там, где нельзя корректно применять статистические методы, можно использовать теорию нечетких множеств, либо комбинировать нечеткость и вероятность. Рассмотрим модели, построенные в рамках этих подходов. Сформулируем критерии оптимизации эксперимента, необходимые для решения задачи активного эксперимента. Предварительно напомним некоторые результаты, полученные в [1-4], а также уточним исходные понятия.

Вероятностная модель эксперимента

Эксперимент интерпретируется как процесс поиска решения проблемы. Возможно, что нам априори известны вероятности гипотез $P(\varepsilon_k)$ из ранее набранной статистики.

Задача 1. Пусть относительно объекта исследований выдвинута полная группа из n-попарно несовместных гипотез ε_k с вероятностями $P(\varepsilon_k)$, причем

$$\sum_k P(\varepsilon_k) = 1, \quad k \in \{1,...,n\} \tag{1}$$

Имеется множество допустимых экспериментов $\mathrm{Q} = \{q_1 ... q_n\}$ по верификации этих гипотез и соответствующие стоимости их проведения $\mathrm{C} = \{c_1 ... c_n\}$. Требуется оптимизировать процесс экспериментального подтверждения одной из гипотез ε_k.

Знание $P(\varepsilon_k)$ позволяет произвести целенаправленный эксперимент и соответственно уменьшить его стоимость С. Верификацию гипотез ε_k можно вести согласно вероятностной модели активного эксперимента [1, 3] , которая имеет вид

$$G = \{ (S,\Sigma,P), \langle F,\circ\rangle, C_F \}, \tag{2}$$

где (S,Σ,P)– вероятностное пространство с $\Sigma -$ *алгеброй* и вероятностной мерой P.

Проведение эксперимента связано с подачей управляющих воздействий $X_i, i \in \{1,...,m\}$ на экспериментальную установку, измерением параметров $Y_j, j \in \{0,...,h\}$ и результатом первичной обработки информации $W_l, l \in \{1,...,v\}$. Эта совокупность "атомарных" действий конечная, будем считать ее элементарным экспериментом и обозначим $q_j = \lfloor X_i \times Y_j \times W_l \rfloor$. Последовательное выполнение экспериментов $Q = q_0, q_1,...,q_h$ интерпретируется как композиция $\circ$ отображений $f_j : S_j \to S_{j+1}$. Таким образом, получена алгебраическая система $F = \langle \{f_j\}, \circ \rangle$ со свойствами замкнутости, ассоциативности, идемпотентности, необратимости. Система F действует в (S,Σ,P) с соответствующей $\sigma -$ *алгеброй* Σ.

Выбор возможной последовательности будем оценивать функцией качества $C_F : F \to \Re$ [1].

В рамках модели (2) сформулируем оптимизационную задачу эксперимента

$$C\left(f_{i_0}\right) * C\left(f_{i_1}\right) * \ldots * C\left(f_{i_h}\right) \to Max(Min),\ j \in \{0,\ldots,h\}, \tag{3}$$

где "*"- символ операции мультипликативной, либо аддитивной функции C_F.

Для реализации вероятностной модели эксперимента необходимо знание исходного распределения вероятностей $P(\varepsilon_1), P(\varepsilon_2),\ldots,.P(\varepsilon_n)$. При отсутствии такой оценки на ранних стадиях эксперимента применим лингво-численную оценку с помощью высказываний, например: вероятность гипотезы составляет «*около или близко к 0,5*».

Фаззификация задачи эксперимента

Ослабим условия *задачи 1* и вместо точечной оценки $P(\varepsilon_1), P(\varepsilon_2)....P(\varepsilon_n)$ введем эмпирическую или теоретическую оценку степени принадлежности вероятности k-гипотезы $\mu(x_k) \in \Phi, \quad k \in \{1,\ldots,n\}$, где Φ - множество выпуклых функций принадлежности.

Задача 2. Пусть относительно объекта исследований выдвинута группа из n- гипотез $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ с оценками их вероятностей имеющимися функциями принадлежности $\mu(x_k) \in \Phi, \quad k \in \{1,\ldots,n\}$. Имеется множество экспериментов $Q = \{q_1 \ldots q_n\}$ по верификации гипотез и энергозатраты на их проведение $E = \{e_1 \ldots e_n\}$. Требуется оптимизировать процесс подтверждения одной из гипотез ε_k.

В этом случае условие несовместности гипотез и ограничение (1) может не выполняться.

Отразим исходную неопределенность значений измеряемой величины нечеткими числами $(\Re,\ \mu(x))$ с функциями принадлежности $\mu(x)$ в LR-формате, который выбирается из условия минимума отклонения от гауссовской функции [2,3]. На ранних стадиях эксперимента предлагается использовать унимодальные нечеткие FN -числа, так как они более адекватно оценивают высказывания типа *«вероятность ε_k приблизительно равна 0,5»*, рис.1.

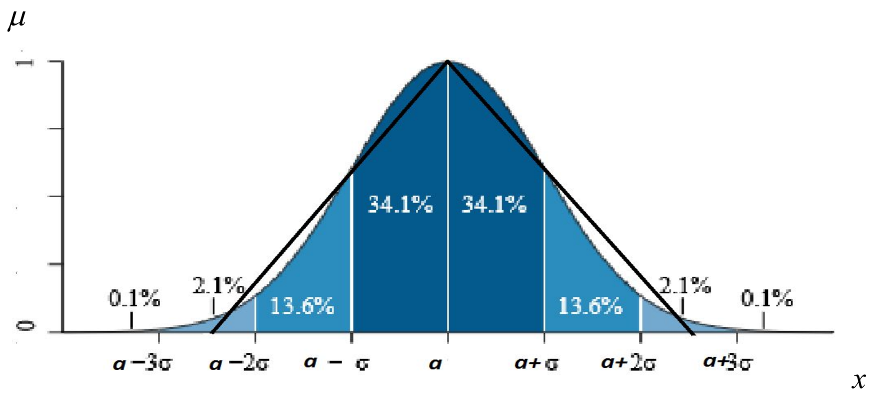

Рисунок 1 - Переход $\mu(x)$ от нормального закона к унимодальному LR-формату

Аналитически $\mu_k(x)$ записывается следующим образом:

$$\mu_k(x)=\begin{cases} 0, \ \ при \ \ x<a-2{,}5\sigma; \\ \dfrac{1}{2{,}5\sigma}(x-(a-2{,}5\sigma)), \ \ при \ \ a-2{,}5\sigma_k \le x \le a; \\ -\dfrac{1}{2{,}5\sigma}(x-(a+2{,}5\sigma)), \ \ при \ \ a<x\le a+2{,}5\sigma; \\ 0, \ \ при \ \ x>a+2{,}5\sigma, \end{cases} \tag{4}$$

$\overline{a}$ - усредненная оценка значений измеряемой величины, данная через *n*- измерений или оценок экспертов; σ - соответствующее среднеквадратичное отклонение оценки.

Для математической модели обработки неопределенности, появляющейся при измерении параметров, предлагается арифметика нечетких чисел.

Арифметика нечетких FN-чисел

Пусть a - усредненная оценка значений измеряемой величины, σ - среднеквадратичное отклонение оценки. Определим нечеткое число в виде пары $(a;\Delta)$**,** где $2\Delta = 5\sigma$ - ширина интервала нечеткого числа.

Определение 1. Нечеткие числа, функция принадлежности которых имеет график в форме равнобедренного треугольника (трапеции), будем называть нечеткими естественными (*Fuzzy Naturale*) числами и записывать в виде $\tilde{a} = (a;\,\Delta)$.

При этом операции сложения и умножения введены по следующим правилам.

Сложение. $\oplus$: $C = A_1 \oplus A_2 = \big((a_1;\Delta_1) + (a_2;\Delta_2) = (a_1 + a_2;\, \Delta_1 + \Delta_2)\big).$ (5)

Умножение. $\otimes$: $C = A_1 \otimes A_2 = \big((a_1;\Delta_1)\cdot(a_2;\Delta_2) \cong (a_1 \cdot a_2;\, a_1\cdot\Delta_2 + a_2\cdot\Delta_1)\big), a_1, a_2 > 0.$ (6)

Замечание. Операция сложения полностью совпадает с обычной операцией для нечетких чисел, операция умножения применяется с округлением. Указанные операции упрощают действия над нечеткими числами и согласуются с арифметикой погрешностей измерений.

Как известно, операции $(\langle - \rangle, \langle \div \rangle)$ выражаются через операции $(\oplus, \otimes)$ посредством симметрии и инверсии соответственно. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. *Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ на множестве FN-чисел определяют структуру коммутативного кольца.*

Доказательство утверждения – прямые вычисления.

Определение 2. *Нечетким множеством оценок назовем*

$$A = \{(x,\, \mu_A(x)) | x \in X\},\, \mu_A : x \to (0,1),\, \mu_A(x) = (a;\,\Delta). \tag{7}$$

На множестве A получена Ψ-арифметика нечетких чисел $\Psi = \{A \to [0,1], \oplus, \otimes\}$, которая позволяет оперировать с *FN*-числами в рамках поставленной задачи.

Таким образом, мы можем перейти от «лингво-численной» к нечеткой оценке исходного распределения вероятностей гипотез $P = P(\varepsilon_1), P(\varepsilon_2)....P(\varepsilon_n)$, рис.2.

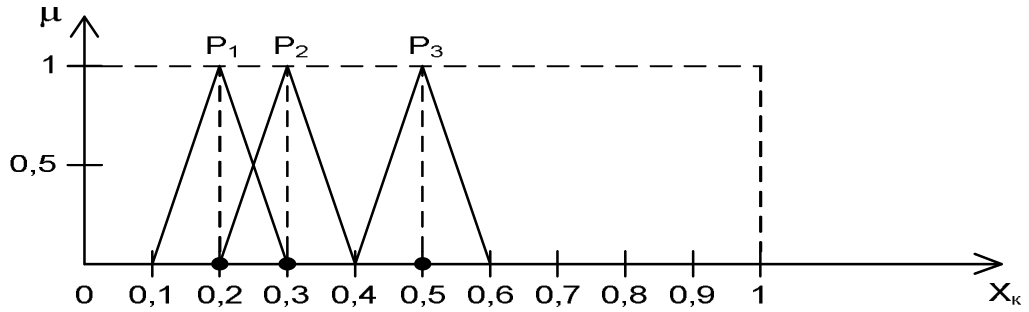

Рисунок 2 - Оценка вероятностей гипотез *«около 0,2; около 0,3; около 0,5»* *FN*-числами

Нечеткая модель эксперимента

Пусть S дискретное пространство состояний, в котором определено начальное состояние $S_0 = \left((1, 1,..., 1), E^n\right)$, что отражает исходную неопределенность в виде полной группы гипотез $\varepsilon_1,..., \varepsilon_n$ и E^n, $E = \{0, 1\}$, как возможное поле действия эксперимента. Промежуточному состоянию S_j поставим в соответствие вершину n–мерного куба E^n и грань булева куба, то есть набор $(a_1,..., a_n) \in E^n$, $a_k = 0$ при отбрасывании гипотезы, $a_k = 1$ - в противном. Ввиду неопределенности элементарный эксперимент свяжем с отображением нечетких множеств

$$q_j = \left[\tilde{X}_i \to \tilde{Y}_j \times \tilde{W}_k\right], \quad i \in \{1,..., m\}, \quad j \in \{0,..., h\}, \quad k \in \{1,..., n\}, \tag{8}$$

которому соответствует нечеткий оператор $\tilde{f}_j : S_j \to S_{j+1}$, *где* $S_j, S_{j+1} \in S$, $S_{j+1} \subseteq S_j$.

В этом случае $\tilde{F} = \{\tilde{f}_j\}$ определяет нечеткое отношение $\tilde{R} : S \times S \to L = [0,1]$ на S, которое обладает важным свойством: пространство S_0 включает в себя промежуточные подпространства, вплоть до конечных $S_k \subset ... \subset S_{j-1} \subset S_j$ $\forall S_j$, S_{j-1}, $S_k \in S$. Отношение $\tilde{R}$ можно отнести к нечетким порядковым отношениям, так как не имеет контуров, обладает свойствами *антисимметричности, транзитивности и антирефлексивности.*

Антисимметричность. $\forall (S_j, S_{j+1}) \in S \times S :$ *при* $S_j \neq S_{j+1}, r(S_j, S_{j+1}) \neq r(S_{j+1}, S_j)$, $r(S_j, S_{j+1}) = r(S_{j+1}, S_j) = 0$. Нечеткий оператор $\tilde{f}$ отображает пространство S в себя и преобразование направлено в сторону уменьшения энтропии эксперимента *H*. Источником ошибок могут быть помехи, погрешности и неправильные действия при проведении эксперимента. Антисимметричные отношения задают на S отношения упорядоченности, доминирования, подчинености. Отношению $\tilde{R}$ можно поставить в соответствие один (и только один) взвешенный антисимметричный граф G с матрицей отношений, в котором каждая пара вершин (S_i, S_j) соединяется стрелкой с весом $\tilde{r}_{ij} = r(S_i, S_j) \in \tilde{R}$, рис.3.

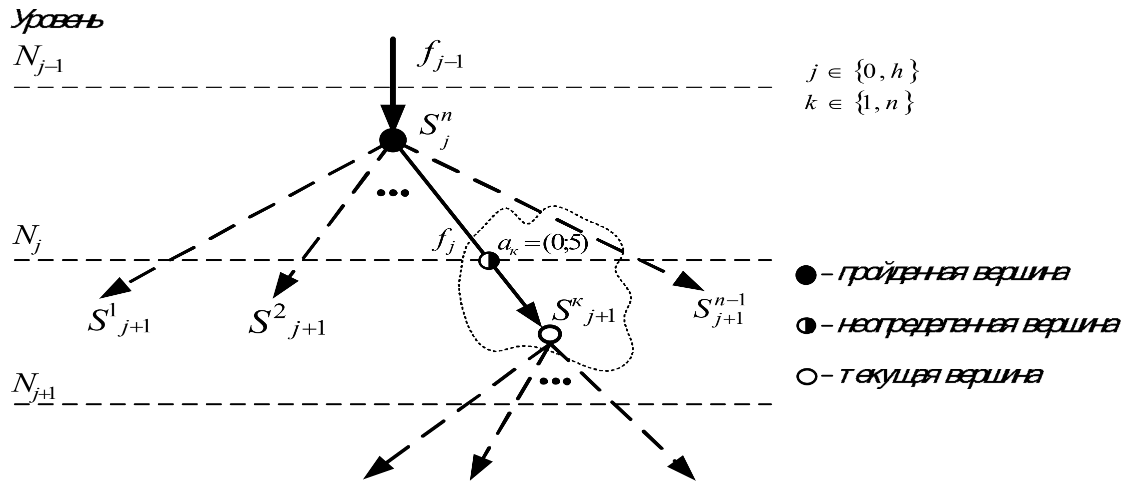

Рисунок 3 - Поиск в пространстве *S* при нечетком подходе

Элементами нечеткой модели эксперимента являются

$$\Theta = \left\{ \langle \tilde{F}, \circ \rangle, S / R, \left(\Psi, C_F \right) \right\}, \tag{9}$$

где $\langle \tilde{F}, \circ \rangle$ - алгебраическая система с одной определяющей операцией $\circ$; $\left(S / R, (\Psi, C_F)\right)$- дискретное пространство S с отношением R, арифметикой FN-чисел Ψ и функций C_F.

Оптимизация эксперимента по энергозатратам

Будем учитывать особенности процесса эксперимента при нечетком представлении. В отличие от вероятностного подхода задача (2) сводится к поиску оптимального (сильнейшего) пути $C^*\left(S_0, \{S_k\} \right)$ из S_0 в одно из S_k на графе эксперимента G. Оптимальный путь определяется как $l^*\left(S_0, \{S_k\} \right) = \underset{C(S_0, \{S_k\})}{Min}\, l\,(S_{0_1} = S_0, S_{0_2}, ..., S_{0_{r-1}}, S_{0_r} = S_k)$.

Если в результате j-эксперимента отвергнута гипотеза ε_k (произошло событие B_k), то вследствие теоремы Байеса получаем апостериорные оценки вероятностей гипотез ε_j

$$A(\varepsilon_j / B_k) = \frac{(a_j; \Delta_j)}{1 - (a_k; \Delta_k)} \text{ при условии } \sum_n a_n = 1. \tag{10}$$

Неопределенность, возникающую в процессе эксперимента, введем появлением в последовательности координатой $a_k = 0{,}5$ - «состояние не определено, не знаю». На практике это означает проведение дополнительного, уточняющего эксперимента, рис.3.

После проведения q_j определяются количественные значения $C(f_j)$ и направление поиска. Так как решение задач активного эксперимента в технических системах неразрывно связано с преобразованием и передачей энергии при проведении эксперимента, стоимостную эффективность эксперимента будем характеризовать таким показателем как *энергетическая цена* E_j, которая учитывает полную мощность экспериментальной установки N и временные затраты на j-м этапе эксперимента $E_j = \int_0^T N_j \cdot dt, \quad T_{\min} \le T \le T_{\max}$. В общем, за оценку энергозатрат принимаем математическое ожидание потерь, которое представляет собой сумму ожидаемых затрат по всем k-путям от корня графа G к каждой из конечных вершин S_k, умноженных на оценку A_k

$$\hat{E} = M\{E_k\} = \sum_k A\{S_k\} * E(q_k), \ \ k \in \{1, n\}, \tag{11}$$

Разложим оценку энергозатрат для j-ой вершины графа на составляющие

$$\hat{E}(S_j) = Eg_j + M\{Eh_j\} - \sigma(Eh_j), \tag{12}$$

где Eg_j - энергозатраты на реализацию последовательности экспериментов $Q(S_0, S_j)$ от вершины S_0 до вершины S_j; $M\{Eh_j\} = \sum_{k=1}^{n} E_{jk} \cdot (a_k; \Delta_k)$- математическое ожидание, а $\sigma^2(Eh_j)$ - дисперсия оценки будущих затрат на реализацию пути от S_j до одного из $\{S_k\}$. Функция E монотонна, так как из $S_{j+1} \subseteq S_j$ следует $E(S_{j+1}) \ge E(S_j)$. Процедура поиска с оценочной функцией (12) обладает свойствами алгоритма Харта, Нильсона и Рафаэля [6], причем объем перебора при поиске не более, чем в известных методах.

Для оптимизации в процессе эксперимента воспользуемся рекуррентной формулой, которая получается из (12), если выделим слагаемое, содержащее первый q_j,

$$\hat{E}(S_j) = Eg_j + E(q_j) \cdot (1 - A_k) + M\{Eh_{j+1}\} - \sigma(Eh_{j+1}) \tag{13}$$

Согласно (13) оценка энергозатрат $\hat{E}(S_j)$ сводится к суммированию взвешенной энергетической цены q_j с оценкой будущих энергозатрат программы эксперимента. При этом необходим пересчет оценок по формуле (10) при опровержении k-гипотезы.

Фактически $\hat{E}(S)$ дает оценку стоимости наиболее выгодного пути, связывающего начальную вершину S_0 с S_k и проходящего через вершину S_j. В этом случае $\sigma(Eh_j)$ можно не учитывать, так как $Eh(S_j) < Eh_R(S_j)$, где. $Eh_R(S_j)$- действительные энергозатраты.

Пример. Имеется оценка вероятностей трех гипотез в виде $A = \{(0{,}4;\ 0{,}02), (0{,}3;\ 0{,}015), (0{,}3;\ 0{,}01)\}$, подмножество экспериментов по верификации этих гипотез $Q_{доп} = \{q_1, q_2, q_3\}$ и соответственно энергозатраты на их проведение $E_{доп} = \{2;\ 2;\ 3\}$. Вначале $Eg_j = 0$. Затем, пересчитывая по формулам (5,6), (10-13), получим следующие значения оценок энергозатрат после проведения экспериментов,

$q_1: \ A_1 = \{(0;\,0),(0{,}50;\,0{,}040),(0{,}50;\,0{,}033)\}, \ \hat{E}(S_1) = (3{,}7;\,0{,}23)$;

$q_2: \ A_2 = \{(0{,}57;\,0{,}041),(0;\,0),(0{,}43;\,0{,}023)\}, \ \hat{E}(S_2) = (3{,}83;\,0{,}21)$;

$q_3: \ A_3 = \{(0{,}57;\,0{,}037),(0{,}43;\,0{,}028),(0;\,0)\}. \ \hat{E}(S_3) = (4{,}17;\,0{,}44)$.

Для реализации выбираем эксперимент q_1 и присваиваем $Eg_j = E_1$. При равенстве значений a_k при выборе будем исходить из величины Δ_k, характеризующей точность результата эксперимента.

Вывод. Оптимизация эксперимента по энергозатратам на S дает реальный выигрыш в объеме перебора по сравнению с тем же алгоритмом поиска, реализуемом без нечетких оценок. Также не требуется предварительное определение всех состояний $S_j \in S$, так как выбор совокупности экспериментов Q_j идет от начального состояния S_0 к S_k. По ходу поиска определяются только те состояния, которые получаются при реализации на данном этапе выбранного эксперимента, благодаря чему сокращается объем вычислений. За возможность оперировать с нечеткими оценками приходится платить громоздкостью вычислений и ростом интервала Δ, что в полной мере отражает реальность и, в сущности, соответствует принципу возрастания неопределенности (энтропии) эксперимента. В результате мы можем следить за точностью всех этапов эксперимента, включая обработку информации и определять необходимый уровень точности.

Список литературы

1. Волков Ю.Д., Кочугаев П.Н. Модели эксперимента в условиях неопределенности. «Науч.-техн. вестник Поволжья», №6, 2013, с.215-218.
2. Волков Ю.Д., Кочугаев П.Н. Нечеткие вычисления при моделировании эксперимента // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сб. статей XIV Межд. науч.-техн. конф. (Пенза, 11-13 дек. 2010 г.).-Пенза, РИО ПГСХА, 2010. С.64-68.
3. Волков Ю.Д.. Интеллектуализация эксперимента в технических системах// Региональная информатика (РИ-2014): материалы XIV межд. конф. (Санкт-Петербург, 29-31 окт. 2014 г.).-СПОИСУ,-СПб. 2014. С.24-25.
4. 2. Волков Ю.Д., Дудин А.В. Оптимизация эксперимента по энергозатратам в условиях вероятностной неопределенности. «Науч.-техн. вестник Поволжья», №5, 2014, с.147-149.
5. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 p.

6. Hart P.E., Nilsson N.J., Raphael B. Correction to “A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths” //SIGART Newsletter. -1972.-T.37.-C.28-29.

Рецензенты:

Чаткин М.Н., д.т.н., профессор, ректор ФГБОУ «Мордовский институт переподготовки кадров агробизнеса», г.Саранск;

Щенников В.Н., д ф-м. н., профессор ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н.П. Огарева, г. Саранск.