УДК 531.395

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШАРНИРНЫХ СТЕРЖНЕЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

[1]Смирнов Д.А.

[1]ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», Нижний Новгород, e-mail: dmsmir@yandex.ru

Получено выражение для кинетической энергии механической системы шарнирно-соединенных стержней с конечным числом степеней свободы, которая имеет вид незамкнутой кинематической цепи. Выражение для кинетической энергии получено с учетом сложного характера движения стержней. Для получения выражения используются методы теоретической механики и математического анализа. Выражение для кинетической энергии представлено в виде функциональной параметрической зависимости, в которой переменными являются обобщенные координаты системы и их первые производные по времени (обобщенные скорости). В качестве обобщенных координат выбраны углы поворота стержней. Полученная зависимость позволяет на основе уравнений Лагранжа второго рода формировать дифференциальные уравнения движения системы, с целью исследования ее динамики. Зависимость, определенная для кинетической энергии приведена к виду удобному для проведения практических расчетов и их автоматизации. Результаты работы могут быть использованы для разработки математических моделей динамики движения незамкнутых кинематических цепей с конечным числом степеней свободы.

Ключевые слова: кинетическая энергия, динамика механических систем, уравнения Лагранжа второго рода.

KINETIC ENERGY OF A MECHANICAL SYSTEM OF HINGED ARMS WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

[1]Smirnov D.A.

[1]Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, e-mail: dmsmir@yandex.ru

An expression is set for the kinetic energy of a mechanical system of pin-jointed arms with a finite number of degrees of freedom that has the form of an open kinematic chain. The expression for the kinematic energy is set consistent with a complex character of the arms movement. The methods of theoretical mechanics and mathematical analysis are used to set up the expression. The kinematic energy expression is presented in the form of a functional parametric dependence, where generalized system coordinates are the variables as well as their first time derivatives (generalized velocities). Angles of rotation of the arms are chosen as the generalized coordinates. The resulted dependence allows forming differential equations for the system movement basing on Lagrange`s equations of the second kind, for the purpose of studying of the dynamics of the system. The dependence defined for the kinetic energy is transformed to facilitate practical calculations and their automation. The results of this research can be used to set up mathematical models of motional dynamics of open kinematic chains with a finite number of degrees of freedom.

Key words: kinetic energy, dynamics of mechanical systems, Lagrange`s equations of the second kind.

Изучение динамики незамкнутых кинематических цепей с конечным числом степеней свободы является актуальной задачей для различных областей науки и техники, например, исследование динамики механических манипуляторов [5]. Одним из распространенных методов формирования математической модели движения таких систем является метод уравнений Лагранжа второго рода [2, 4, 6], для составления которых необходимо выражение для кинетической энергии системы в обобщенных координатах. Поэтому формирование общего выражения для кинетической энергии системы с конечным числом степеней свободы является актуальной задачей.

Цель исследования.

Целью данной работы является получение общего выражения для кинетической энергии механической системы шарнирно-соединенных стержней с конечным числом степеней свободы, схема которой представлена на рис. 1.

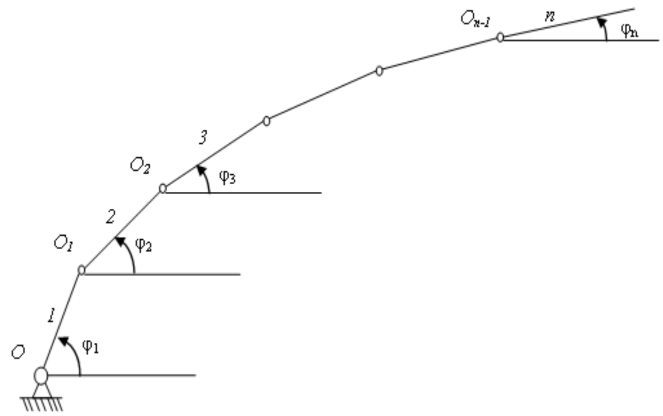

Рис. 1 – Кинематическая схема
1, *2*, *3*, … , *n* – абсолютно-твердые стержни; O, O_1, O_2, … , O_{n-1} – идеальные шарниры;
φ_1, φ_2, φ_3, … , φ_n – углы поворота стержней

Материалы и методы.

Рассматривается механическая система, состоящая из n абсолютно-твердых стержней, длины которых обозначим l_i. Стрежни соединены между собой шарнирами O_i. Стержень *1* закреплен при помощи неподвижного цилиндрического шарнира O.

Система имеет n степеней свободы. В качестве обобщенных координат выбраны углы поворота стержней φ_i. Таким образом, уравнения Лагранжа II рода можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_i}=Q_i\,, \tag{1}$$

где φ_i – обобщенные координаты системы, $\dot{\varphi}_i$ – обобщенные скорости, Q_i – обобщенные силы, T – кинетическая энергия системы.

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий n стержней по формуле

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i=T_1+T_2+T_3+\ldots+T_n\,, \tag{2}$$

где T_i – кинетическая энергия i-го стержня.

В работе [6] получены выражения для кинетических энергий стержня *1* и стержня *2*:

$$T_1=\frac{1}{6}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2\,; \tag{3}$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_1^2l_1^2+\frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2+\frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2, \tag{4}$$

где m_1 и m_2 – массы стержней *1* и *2* соответственно.

Кинетическая энергия произвольного *i*-го стержня (для $i > 2$) может быть определена по формуле [2, 4, 6]

$$T_i = \sum \frac{m_k \overline{V}_k^2}{2}, \tag{5}$$

где m_k – масса *k*-ой точки *i*-го стержня, $\overline{V}_k$ – вектор скорости *k*-ой точки *i*-го стержня.

Скорость $\overline{V}_k$ (рис. 2) определяется теоремой сложения скоростей [2]

$$\overline{V}_k = \overline{V}_{O_1} + \overline{V}_{O_2O_1} + \overline{V}_{O_3O_2} + ... + \overline{V}_{O_{i-1}O_{i-2}} + \overline{V}_{kO_{i-1}}, \tag{6}$$

где $\overline{V}_{O_1}$ – вектор скорости шарнира O_1, $\overline{V}_{O_2O_1}$ – вектор относительной скорости шарнира O_2, $\overline{V}_{O_{i-1}O_{i-2}}$ - вектор относительной скорости шарнира O_{i-1}, $\overline{V}_{kO_{i-1}}$ – вектор относительной скорости *k*-ой точки *i*-го стержня.

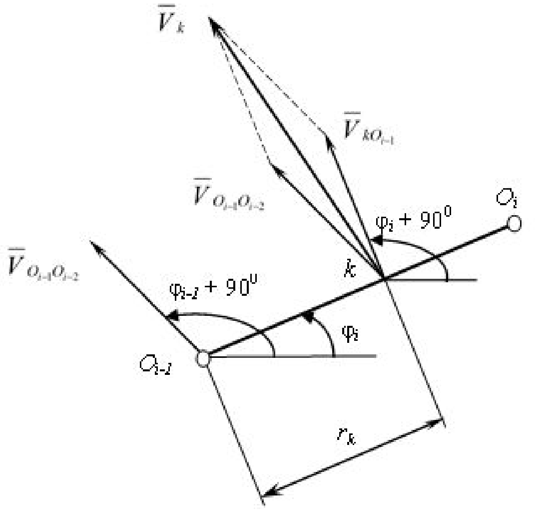

Рис. 2 – Схема к определению вектора скорости

Запишем выражение для квадрата скорости

$$\begin{aligned}
V_k^2 &= V_{O_1}^2 + V_{O_2O_1}^2 + V_{O_3O_2}^2 + ... + V_{O_{i-1}O_{i-2}}^2 + V_{kO_{i-1}}^2 + 2V_{O_1}V_{O_2O_1}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
&+ 2V_{O_1}V_{O_3O_2}\cos(\varphi_3 - \varphi_1) + ... + 2V_{O_1}V_{O_{i-1}O_{i-2}}\cos(\varphi_{i-1} - \varphi_1) + 2V_{O_1}V_{kO_{i-1}}\cos(\varphi_i - \varphi_1) + \\
&+ 2V_{O_2O_1}V_{O_3O_2}\cos(\varphi_3 - \varphi_2) + 2V_{O_2O_1}V_{O_4O_3}\cos(\varphi_4 - \varphi_2) + ... + 2V_{O_2O_1}V_{kO_{i-1}}\cos(\varphi_i - \varphi_2) + \\
&+ 2V_{O_3O_2}V_{O_4O_3}\cos(\varphi_4 - \varphi_3) + 2V_{O_3O_2}V_{O_5O_4}\cos(\varphi_5 - \varphi_3) + ... + 2V_{O_3O_2}V_{kO_{i-1}}\cos(\varphi_i - \varphi_3) + ... + \\
&+ 2V_{O_{i-1}O_{i-2}}V_{kO_{i-1}}\cos(\varphi_i - \varphi_{i-1}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Представим выражение (7) в виде

$$\begin{aligned}
V_k^2 &= V_{O_1}^2 + \sum_{j=2}^{i-1} V_{O_jO_{j-1}}^2 + V_{kO_{i-1}}^2 + 2V_{O_1}\sum_{j=2}^{i-1} V_{O_jO_{j-1}}\cos(\varphi_j - \varphi_1) + 2V_{O_2O_1}\sum_{j=3}^{i-1} V_{O_jO_{j-1}}\cos(\varphi_j - \varphi_2) + \\
&+ 2V_{O_3O_2}\sum_{j=4}^{i-1} V_{O_jO_{j-1}}\cos(\varphi_j - \varphi_3) + ... + 2V_{o_1}V_{kO_{i-1}}\cos(\varphi_i - \varphi_1) + 2V_{kO_{i-1}}\sum_{j=2}^{i-1} V_{O_jO_{j-1}}\cos(\varphi_i - \varphi_j).
\end{aligned} \tag{8}$$

Выразим скорость шарнира O_1 и относительные скорости через угловые скорости и длины стержней

$$V_{O_1} = \omega_1 l_1 = \dot{\varphi}_1 l_1,\; V_{O_2 O_1} = \omega_2 l_2 = \dot{\varphi}_2 l_2,$$

$$V_{O_3 O_2} = \omega_3 l_3 = \dot{\varphi}_3 l_3,\; \ldots,\; V_{O_j O_{j-1}} = \omega_j l_j = \dot{\varphi}_j l_j,$$

$$V_{kO_{i-1}} = \omega_i l_i = \dot{\varphi}_i r_k,$$

где r_k – расстояние от k-ой точки i-го стержня до полюса O_{i-1}.

Подставляя выражения для скоростей в выражение (7) получим

$$\begin{aligned}
V_k^2 &= \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 l_3^2 + \ldots. + \dot{\varphi}_{i-1}^2 l_{i-1}^2 + \dot{\varphi}_i^2 r_k^2 + 2\dot{\varphi}_1 l_1 \dot{\varphi}_2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
&+ 2\dot{\varphi}_1 l_1 \dot{\varphi}_3 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \ldots + 2\dot{\varphi}_1 l_1 \dot{\varphi}_{i-1} l_{i-2} \cos(\varphi_{i-1} - \varphi_1) + 2\dot{\varphi}_1 l_1 \dot{\varphi}_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_1) + \\
&+ 2\dot{\varphi}_2 l_2 \dot{\varphi}_3 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + 2\dot{\varphi}_2 l_2 \dot{\varphi}_4 l_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) + \ldots + 2\dot{\varphi}_2 l_2 \dot{\varphi}_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_2) + \\
&+ 2\dot{\varphi}_3 l_3 \dot{\varphi}_4 l_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) + 2\dot{\varphi}_3 l_3 \dot{\varphi}_5 l_5 \cos(\varphi_5 - \varphi_3) + \ldots + 2\dot{\varphi}_3 l_3 \dot{\varphi}_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_3) + \ldots + \\
&+ 2\dot{\varphi}_{i-1} l_{i-1} \dot{\varphi}_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_{i-1}).
\end{aligned} \tag{9}$$

С учетом зависимости (8) выражение (9) может быть записано в сокращенном виде

$$\begin{aligned}
V_k^2 &= \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \sum_{j=2}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 l_j^2 + \dot{\varphi}_i^2 r_k^2 + 2\varphi_1 l_1 \sum_{j=2}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_1) + 2\varphi_2 l_2 \sum_{j=3}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_2) + \\
&+ 2\varphi_3 l_3 \sum_{j=4}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_3) + \ldots + 2\varphi_1 l_1 \varphi_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_1) + +2\varphi_i r_k \sum_{j=2}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j).
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в выражение (5), получим выражение для кинетической энергии i-го стержня

$$\begin{aligned}
T_i &= \sum \frac{m_k \overline{V}_k^2}{2} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 \sum m_k + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 l_j^2 \sum m_k + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_i^2 \sum m_k r_k^2 + \varphi_1 l_1 \sum_{j=2}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_1) \sum m_k + \\
&+ \varphi_2 l_2 \sum_{j=3}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_2) \sum m_k + \varphi_3 l_3 \sum_{j=4}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_3) \sum m_k + \ldots + \varphi_1 l_1 \varphi_i \cos(\varphi_i - \varphi_1) \sum m_k r_k \\
&+ \varphi_i \sum_{j=2}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \sum m_k r_k.
\end{aligned} \tag{11}$$

В данном выражении: $\sum m_k = m_i$ – масса i-го стержня, $\sum m_k r_k = \frac{1}{2} m_i l_i$ – статический момент i-го стержня относительно точки O_{i-1}, $\sum m_k r_k^2 = \frac{1}{3} m_i l_i^2$ – момент инерции i-го стержня относительно точки O_{i-1}. Тогда для кинетической энергии i-го стержня получим

$$T_i = \frac{1}{2} m_i l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_i \sum_{j=2}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 l_j^2 + \frac{1}{6} m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + m_i \varphi_1 l_1 \sum_{j=2}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_1) +$$
$$+ m_i \varphi_2 l_2 \sum_{j=3}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_2) + m_i \varphi_3 l_3 \sum_{j=4}^{i-1} \varphi_j l_j \cos(\varphi_j - \varphi_3) + \ldots + \qquad (12)$$
$$+ \frac{1}{2} m_i l_i \varphi_1 l_1 \varphi_i \cos(\varphi_i - \varphi_1) + \frac{1}{2} m_i l_i \sum_{j=2}^{i-1} \varphi_j l_j \varphi_i \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

С учетом выражений (2), (3) и (4), кинетическую энергию всей системы представим в виде

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \sum_{i=3}^{n} T_i ,$$

где T_i определяется по формуле (12).

Приведем выражение для кинетической энергии системы к виду удобному для упрощения расчетов и возможности их автоматизации

$$T = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n . \qquad (13)$$

Слагаемое A_1 определяется выражением:

$$A_1 = \sum_{m=1}^{n} a_{1m} l_m^2 \dot{\varphi}_m = a_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + a_{12} l_2^2 \dot{\varphi}_2 + a_{13} l_3^2 \dot{\varphi}_3 + \ldots + a_{1n} l_n^2 \dot{\varphi}_n ,$$

где a_{1m} – коэффициенты, характеризующие инерционные свойства системы, определяемые по формулам:

$$a_{11} = \frac{1}{6} m_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} m_j , \; a_{12} = \frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n} m_j , \; \ldots. , \; a_{1m} = \frac{1}{6} m_m + \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{n} m_j , \; \ldots , \; a_{1n} = \frac{1}{6} m_n .$$

Слагаемое A_2 определяется выражением:

$$A_2 = \sum_{m=2}^{n} a_{2m} l_m \dot{\varphi}_m \cos(\varphi_m - \varphi_1) = a_{22} l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + a_{23} l_3 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \ldots + a_{2n} l_n \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_1),$$

где a_{2m} – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_{22} = \left(\frac{1}{2} m_2 + \sum_{j=3}^{n} m_j \right) l_1 \dot{\varphi}_1 , \; a_{23} = \left(\frac{1}{2} m_3 + \sum_{j=4}^{n} m_j \right) l_1 \dot{\varphi}_1 , \; \ldots. ,$$
$$a_{2m} = \left(\frac{1}{2} m_m + \sum_{j=m+1}^{n} m_j \right) l_1 \dot{\varphi}_1 , \; \ldots , \; a_{2n} = \frac{1}{2} m_n l_1 \dot{\varphi}_1 .$$

Слагаемое A_3 определяется выражением:

$$A_3 = \sum_{m=3}^{n} a_{3m} l_m \dot{\varphi}_m \cos(\varphi_i - \varphi_2) = a_{33} l_3 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + a_{34} l_4 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) + \ldots + a_{3n} l_n \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_2),$$

где a_{3m} – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_{33} = \left(\frac{1}{2} m_3 + \sum_{j=4}^{n} m_j \right) l_2 \dot{\varphi}_2 ,\ a_{34} = \left(\frac{1}{2} m_4 + \sum_{j=5}^{n} m_j \right) l_2 \dot{\varphi}_2 ,\ \ldots. ,$$

$$a_{3m} = \left(\frac{1}{2} m_i + \sum_{j=m+1}^{n} m_j \right) l_2 \dot{\varphi}_2 ,\ \ldots ,\ a_{3n} = \frac{1}{2} m_n l_2 \dot{\varphi}_2 .$$

Произвольное слагаемое A_i (для $2 < i < n$) определяется выражением

$$A_i = \sum_{m=i+1}^{n} a_{im} l_m \dot{\varphi}_m \cos(\varphi_m - \varphi_1) = a_{im} l_m \dot{\varphi}_m \cos(\varphi_m - \varphi_{m-1}) + \\ + a_{im+1} l_{m+1} \dot{\varphi}_{m+1} \cos(\varphi_{m+1} - \varphi_{m-1}) + \ldots + a_{in} l_n \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_{m-1}) ,$$

где a_{im} – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_{im} = \left(\frac{1}{2} m_m + \sum_{j=m+1}^{n} m_j \right) l_{m-1} \dot{\varphi}_{m-1} ,\ a_{in} = \frac{1}{2} m_n l_{i-1} \dot{\varphi}_{m-1} .$$

Слагаемое A_n определяется выражением:

$$A_n = \frac{1}{2} m_n l_{n-1} l_n \dot{\varphi}_{n-1} \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}) .$$

Результаты и их анализ.

Рассмотрим случай, когда все стержни имеют одинаковые длины ($l_i = l$) и массы ($m_i = m$). Тогда полученные выражения для A_i упрощаются.

Слагаемое A_1 определяется выражением:

$$A_1 = l^2 \sum_{m=1}^{n} a_{1m} \dot{\varphi}_m = (a_1 \dot{\varphi}_1 + a_{12} \dot{\varphi}_2 + a_{13} \dot{\varphi}_3 + \ldots + a_{1n} \dot{\varphi}_n) m l^2 ,$$

где a_{1m} – коэффициенты, характеризующие инерционные свойства системы, определяемые по формулам:

$$a_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + (n-1) \right),\ a_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + (n-2) \right),\ \ldots. ,\ a_{1m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + (n-m) \right),\ \ldots ,\ a_{1n} = \frac{1}{6} .$$

Слагаемое A_2 определяется выражением:

$$A_2 = m l^2 \dot{\varphi}_1 \sum_{m=2}^{n} a_{2m} \dot{\varphi}_m \cos(\varphi_m - \varphi_1) = (a_{22} \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + a_{23} \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \ldots + a_{2n} \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_1)) m l^2 \dot{\varphi}_1 ,$$

где a_{2m} – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_{22} = \left(\frac{1}{2} + (n-2) \right),\ a_{23} = \left(\frac{1}{2} + (n-3) \right),\ \ldots. , a_{2m} = \left(\frac{1}{2} + (n-m) \right),\ \ldots ,\ a_{2n} = \frac{1}{2} .$$

Слагаемое A_3 определяется выражением:

$$A_3 = m l^2 \dot{\varphi}_2 \sum_{m=3}^{n} a_{3m} \dot{\varphi}_m \cos(\varphi_i - \varphi_2) = (a_{33} \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + a_{34} \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) + \ldots + a_{3n} \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_2)) m l^2 \dot{\varphi}_2 ,$$

где a_{3m} – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_{33} = \left(\frac{1}{2} + (n-3)\right),\ a_{34} = \left(\frac{1}{2} + (n-4)\right),\ \ldots,\ a_{3m} = \left(\frac{1}{2} + (n-m)\right),\ \ldots,\ a_{3n} = \frac{1}{2}.$$

Произвольное слагаемое A_i (для $2 < i < n$) определяется выражением

$$A_i = ml^2\dot{\varphi}_{m-1}\sum_{m=i+1}^{n} a_{im}\dot{\varphi}_m \cos(\varphi_m - \varphi_1) = \big(a_{im}\dot{\varphi}_m \cos(\varphi_m - \varphi_{m-1}) +$$
$$+ a_{im+1}\varphi_{m+1}\cos(\varphi_{m+1} - \varphi_{m-1}) + \ldots + a_{in} l_n \dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_{m-1})\big) ml^2\dot{\varphi}_{m-1},$$

где a_{im} – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$a_{im} = \left(\frac{1}{2} + (n-m)\right),\ a_{in} = \frac{1}{2}.$$

Слагаемое A_n определяется выражением:

$$A_n = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_{n-1}\dot{\varphi}_n \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}).$$

Заключение.

Полученное выражение (13) может быть использовано для определения кинетической энергии механической системы шарнирно-соединенных стержней с конечным числом степеней свободы, для составления дифференциальных уравнений и исследования движения таких систем, а также для разработки методов автоматизации расчетов для задач данного класса.

Список литературы

1. Бахвалов С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 636 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
4. Панов Ю.Л., Панов А.Ю. Относительное движение в механике. Инженерные задачи. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Нижний Новгород, 2008. 144 с.
5. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. Смирнов Д.А., Тежикова Н.П. Исследование динамики механической системы шарнирных стержней с двумя степенями свободы // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10 (15). – С. 3389 – 3393.

Рецензенты:

Панов А.Ю., д.т.н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород;
Иванов А.А., д.т.н., профессор кафедры «Автоматизации машиностроения», ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», г. Нижний Новгород.