УДК 674.047

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА ПРИ КОНВЕКТИВНОЙ СУШКЕ ДРЕВЕСИНЫ

Гороховский А.Г.[1], Шишкина Е.Е.[1], Чернышев О.Н.[1]

[1]ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет», Екатеринбург, Россия (620100, Екатеринбург, ул. Сибирский тракт 37), e-mail: elenashishkina@yandex.ru

В статье рассматриваются теоретические исследования лесосушильной камеры как объекта управления с распределенными параметрами. При этом низкотемпературная сушка пиломатериалов рассматривается с целью упрощения как процесс несвязанного тепломассообмена, так как он протекает при постоянной температуре и влиянием теплообмена на массоперенос можно пренебречь. Используется решение стандартного уравнения переноса для неограниченной пластины при соответствующих начальных и граничных условиях. Для корректного решения задачи вводится управляющая функция, имеющая физический смысл плотности потока вещества на поверхности тела. Также должны быть известны: состояние агента сушки, определяющее равновесную влажность древесины, коэффициент влагопроводности древесины и коэффициент влагообмена. В ходе исследования сформулирована задача оптимального быстродействия для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при заданном виде ограничения на управляющие воздействия. Кроме того, математически строго получена оценка погрешности при решении указанной системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: сушка древесины, система оптимального быстродействия, система дифференциальных уравнений.

OPTIMUM CONTROL OF PROCESSES OF THERMO-MASS TRANSFER AT CONVECTION TO WOOD DRYING

Gorohovskij A.G.[1], Shishkina E.E.[1], Chernyshev O.N.[1]

[1]Urals state forestry engineering university, Yekaterinburg, Russia (620100, Yekaterinburg, Sibirsky trakt St. 37), e-mail: elenashishkina@yandex.ru

In article theoretical researches of the chamber for wood drying as object of management with the distributed parametres are considered. For the purpose of simplification the low temperature of drying of the lumber is considered as process of untied thermo-mass transfer, as it proceeds at constant temperature and head transfer to effect thermo-mass transfer can be neglected. Use a solution of the transfer equation standards for unlimited plate under the appropriate initial and boundary conditions. For a correct solution of the problem is introduced control function, which has the physical meaning of the flux density of the substance on the surface of the material. Also should be known: a condition of the agent of the drying, defining equilibrium humidity of wood, factor of carrying out of a moisture of wood and factor of an exchange of a moisture. During research the problem of optimum speed for infinite system of the ordinary differential equations is formulated at the set kind of restrictions on operating actions. The mathematics method receives an error estimation at the decision of the specified system of the differential equations.

Keywords: wood drying, system of optimum speed, system of the differential equations.

С точки зрения теории оптимального управления лесосушильная камера представляет собой объект с распределенными параметрами [1], который описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). С некоторыми допущениями низкотемпературную сушку пиломатериалов можно рассматривать [2] как процесс несвязанного тепломассообмена, т.к. он протекает при постоянной температуре и влиянием теплообмена на массоперенос можно пренебречь. В этом случае уравнение переноса для неограниченной пластины имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le R,\ a_m = \mathrm{const}) \qquad (1)$$

при начальных и граничных условиях:

$$U(x,0)=\varphi(x),\quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=R}=u(\tau),\quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \tag{2}$$

Функция u (τ), рассматриваемая как управляющая, имеет физический смысл плотности потока вещества на поверхности тела. В рассматриваемом случае:

$$u(\tau)=\alpha_m\left[U(R,\tau)-U_c(\tau)\right], \tag{3}$$

где $U_c(\tau)$ - состояние агента сушки, определяющее равновесную влажность древесины;

a_m – коэффициент влагопроводности древесины;

α_m – коэффициент влагообмена.

Вводится ограничение:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \le L \qquad (0 \le x \le R), \tag{4}$$

Далее зададим конечное состояние U в виде функции f (x) непрерывной и однозначной на отрезке [0, R].

Пусть U [u (τ), τ, x] – решение уравнения (1) при условиях (2).

Необходимо найти такое управляющее воздействие u (τ) (0 ≤ τ ≤ T), чтобы при условии (4) выполнялось равенство:

$$U\,[u\,(T),\, T,\, x] = f\,(x), \tag{5}$$

причем время T было бы минимальным. Предполагается также, что такое управляющее воздействие существует.

Рассмотрим один из возможных вариантов приближенного решения и дадим оценку получаемой при этом погрешности вида:

$$\int_0^R \left\{U_*\left[u(T),T,x\right]-f(x)\right\}^2 dx < \delta, \tag{6}$$

где U_* - приближенное решение;

δ – заданная допустимая погрешность.

Продифференцируем уравнение (1) по x:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=a_m\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности. На основании теоремы о наибольшем и наименьшем значениях решения уравнения теплопроводности [3] можно заключить, что если в начальный момент τ = 0 справедливо

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \le L, \qquad (0 \le x \le R),$$

а в последующее время τ > 0 выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=R} \le L,$$

то имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \le L, \text{ при } \tau \ge 0 \quad (0 \le x \le R).$$

Таким образом, ограничение (4) можно заменить ограничением

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=R} = |u(\tau)| \le L, \tag{8}$$

Далее применим конечное интегральное косинус–преобразование по переменной x.

$$U_n(t) = \int_0^R U(\varepsilon, R)\cos\frac{n\pi}{R}\varepsilon d\varepsilon \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

где $U_n(t)$ – изображение U (x, τ) по переменной x [4]. Оригинал находится по формуле:

$$U(x,\tau) = \frac{1}{R}U_0(\tau) + \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\cos\frac{n\pi}{R}x, \tag{10}$$

Применяя это преобразование к уравнению (1) и условиям (2) при заданной f (x) получим:

$$\frac{dU_n}{d\tau} = -\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 U_n + (-1)^n a_m u(\tau), \tag{11}$$

$$C_{1n} = \int_0^R \varphi(\varepsilon)\cos\frac{n\pi}{R}\varepsilon d\varepsilon, \tag{12}$$

$$C_{2n} = \int_0^R f(\varepsilon)\cos\frac{n\pi}{R}\varepsilon d\varepsilon, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

Анализируя выражение (10), можно заключить, что уравнения (11) описывают процесс изменения коэффициентов U_n ряда Фурье (10), являющегося решением уравнения (1). При этом начальными условиями служат выражения (12), т.е. коэффициенты разложения в ряд Фурье функции φ (x) начального условия (2). Желаемое конечное состояние задается аналогичной формулой (13) для функции f (x).

В результате оказалась сформулированной задача оптимального быстродействия для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11) при ограничении на управляющие воздействия типа:

$$|u(\tau)| \leq L$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу оптимального быстродействия для конечного числа (m + 1) уравнений (11). При этом очень важно получить оценку погрешности, возникающую вследствие этого. Используя известное свойство рядов Фурье [5] и с учетом (10) и (13), получим:

$$\int_0^R [U(x,T) - f(x)]^2 dx = \frac{1}{R}[U_0(T) - C_{20}]^2 + \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}[U_n(T) - C_{2n}]^2, \qquad (14)$$

С другой стороны общее решение уравнений (11) имеет вид:

$$U_n(\tau) = C_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 \tau} + (-1)^n a_m \int_0^R u(t-\tau)\cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 \tau} d\tau .$$

Далее, используя ограничение (8), найдем:

$$|U_n(T) - C_{2n}| = \left| C_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 T} + (-1)^n a_m \int_0^R u(T-\tau) e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 \tau} d\tau - C_{2n} \right| <$$

$$< \left| C_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 T} - C_{2n} \right| + \left| a_m \int_0^T L e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 \tau} d\tau \right| = \left| C_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 T} - C_{2n} \right| + L\left(\frac{R}{n\pi}\right)^2$$

Воспользовавшись этим неравенством и выражением (14) получим искомую оценку:

$$I = \int_0^R [U(x,T) - f(x)]^2 dx < \frac{1}{R}[U_0(T) - C_{20}]^2 + \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{m}[U_n(T) - C_{2n}]^2 +$$

$$+ \frac{2}{R}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\{\left| C_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 T} - C_{2n} \right| + L\left(\frac{R}{n\pi}\right)^2\right\}^2 = \frac{2}{R}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\{\left| C_{1n} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 T} - C_{2n} \right| + L\left(\frac{R}{n\pi}\right)^2\right\}^2, \qquad (15)$$

Так как в момент времени $\tau = T$ имеем

$U_n(T) = C_{2n}$ (n = 0, 1, 2, …, m)

В самом простом, но важном для практического применения случае, когда:

$$\varphi(x) = const, \qquad f(x) = const,$$

$C_{1n} = 0$, $C_{2n} = 0$ при $n > 0$, как это следует из (12), (13) оценка (15) приобретает вид:

$$I < \frac{2L^2R^2}{\pi^4}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2L^2R^2}{\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^4}\right), \qquad (16)$$

так как [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Отсюда следует, что правая часть неравенства (16) может стать сколь угодно малой, если m достаточно велико.

Таким образом, можно рассматривать задачу оптимального по быстродействию перемещения из точки $C_1 = (C_{10}, C_{11}, \ldots, C_{1m})$ в точку $C_2 = (C_{20}, C_{21}, \ldots, C_{2m})$ для $(m + 1)$ первых уравнений (11) при фиксированном m.

Список литературы

1. Гороховский А.Г. Повышение эффективности управления процессом сушки пиломатериалов / А.Г. Гороховский. Екатеринбург: Ур. гос. лесотехн. ун-т. – 2007. – 128 с.
2. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины / Г.С. Шубин. М.: Лесная промышленность, 1990. - 336 с.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский / М.: Гостехиздат. – 1953. – 360 с.
4. Лыков А.В. Тепломассообмен. Справочник / А.В. Лыков. – М.: Энергия. – 1972. – 309 с.
5. Бронштейн И.Н. Справочник по математике (для инженеров и учащихся ВТУЗов) / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев / М.: Наука. – 1986. – 544 с.

Рецензенты:

Черемных Н.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Начертательной геометрии и машиностроительного черчения «Уральский государственный лесотехнический университет», г.Екатеринбург;

Уласовец В.Г., д.т.н., профессор кафедры механической обработки древесины ФГБОУ ВПО « Уральский государственный лесотехнический университет», г.Екатеринбург.