УДК 519.622.2

СПОСОБ ОЦЕНКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШАТЕЛЕЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тутуева А.В., Бутусов Д.Н., Андреев В.С.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», Санкт-Петербург, Россия (197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д.5), e-mail: butusovdn@mail.ru

В статье рассматривается способ оценки вычислительной эффективности решателей обыкновенных дифференциальных уравнений, реализованных на ЭВМ с параллельной архитектурой. На основе сформулированного критерия вычислительной эффективности предложена методика сравнения решателей ОДУ, базирующихся на различных численных методах интегрирования. Результаты исследования подтверждаются серией компьютерных экспериментов в среде моделирования NILabVIEW. В качестве тестовых примеров рассматривается решатель ОДУ, использующий классический метод Рунге – Кутты второго порядка алгебраической точности и решатель на основе авторского параллельного метода интегрирования второго порядка. Проведенный анализ прироста вычислительных затрат различных решателей в зависимости от порядка моделируемой системы подтверждает достоверность авторского метода оценки вычислительной эффективности, а также демонстрирует существенные преимущества рассматриваемого параллельного численного метода над классическими методами численного интегрирования.

Ключевые слова: численные методы интегрирования, параллельные вычисления, решатель обыкновенных дифференциальных уравнений.

METHODS FOR EVALUATING THECOMPUTATIONAL EFFECIENCY OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVERS

Tutueva A.V., Butusov D.N., Andreev V.S.

Saint-Petersburg State Electrotechnical University, St.Petersburg, Russia. (197376, 5, Professora Popova st., St.Petersburg, Russia), e-mail: butusovdn@mail.ru

The paper discusses the computational efficiency-based comparison technique forvarious differential ordinary equations solvers, whileimplemented on computers with parallel architecture. The newmethod to estimate computational efficiency for ODE solvers is given. Theoretical results are confirmed by a series of computer experiments in NI LabVIEW simulation environment. As test cases, Runge – Kutta 2nd order explicit method solver and new parallel D2 methodsolver of 2nd order are considered.The analysis of computational cost increasefor the described ODE solvers confirms the reliability of the giventechnique of estimating thesolver's computational efficiency.The significant advantages of the considered parallel numerical integration method are shown.

Keywords: numerical methods of integration, parallel computing, ordinary differential equations solver.

Современная вычислительная техника в своем развитии ориентируется на аппаратные платформы с параллельной архитектурой. Эффективное применение таких вычислителей требует разработки специальных алгоритмов, учитывающих параллелизм выбранной аппаратной платформы. Одним из известных примеров таких алгоритмов являются параллельные методы решения задачи Коши. Различные варианты подобных методов приводятся в работах [2,3,4,5], при этом в каждом случае авторы применяют собственную оценку полученных решений, что затрудняет их сравнительный анализ.

Традиционным критерием вычислительной эффективности методов численного интегрирования (ЧМИ) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) служит общее число арифметических операций на шаге интегрирования, необходимое для достижения требуемой точности решателя. Однако подобный подход учитывает лишь суммарное количество вычислений, вне зависимости от того, какие из них могут быть выполнены одновременно, а какие − строго последовательно. Это делает актуальной задачу оценки вычислительной эффективности решателя ОДУ с точки зрения параллельной организации процесса моделирования. Широко известный закон Амдала здесь обладает рядом недостатков, не учитывая, к примеру, неравномерность распределения действий в параллельных ветвях вычислительного процесса, что существенно при аппаратной реализации решателя.

В работе изложен авторский способ оценки вычислительной эффективности решателей ОДУ с учетом степени их собственного параллелизма. Приводятся примеры оценки различных решателей ОДУ с параллельной архитектурой. Компьютерное моделирование и автоматизированный расчет критерия реализованы в среде NILabVIEW.

Оценка вычислительных затрат решателя

Рассмотрим решатель ОДУ, в котором некоторый объем действий должен быть выполнен строго последовательно, а другая часть вычислений может быть распараллелена. Определим совокупность параметров, характеризующих вычислительную эффективность такого решателя. Пусть N − общее число арифметических операций решателя ОДУ на одном шаге, а $\sum_i^m n_i$ − объем вычислений, который можно распределить между m вычислительными процессорами, при этом число арифметических операций на каждом из них составит n_i. В качестве оценки вычислительных затрат решателя (ОВЗАР) f будем рассматривать сумму действий нераспараллеливаемой части и приведенное число вычислений s, содержащееся в параллелизуемой части решателя:

$$f = N - \sum_i^m n_i + s. \tag{1}$$

Приведенное число действий в параллельной части решателя зависит от распределения общего объема вычислений $\sum_i^m n_i$ на m параллельных вычислительных процессоров. Ключевыми параметрами такого распределения являются последовательность, содержащая наибольшее число арифметических операций $n_{max} = \max\{n_i, \forall\, i = \overline{1,m}\}$ в распараллеленной части процесса, и соотношение между длиной этой последовательности и числом операций при теоретически оптимальном распределении действий между процессорами $\frac{\sum_i^m n_i}{m}$. Второй параметр отражает равномерность распределения вычислений в распараллеленной части решателя при использовании заданного числа вычислительных процессоров m с длиной максимальной цепочки арифметических операций n_{max}. Для оценки данного параметра введем критерий эффективности параллелизма (КЭП) k:

$$k = \frac{\frac{\sum_i^m n_i}{m} + n_{max}}{2\sum_i^m n_i}. \tag{2}$$

Для того чтобы проиллюстрировать принцип работы КЭП, рассмотрим три примера распараллеливания вычислительного процесса, содержащего 8 операций (рис. 1).

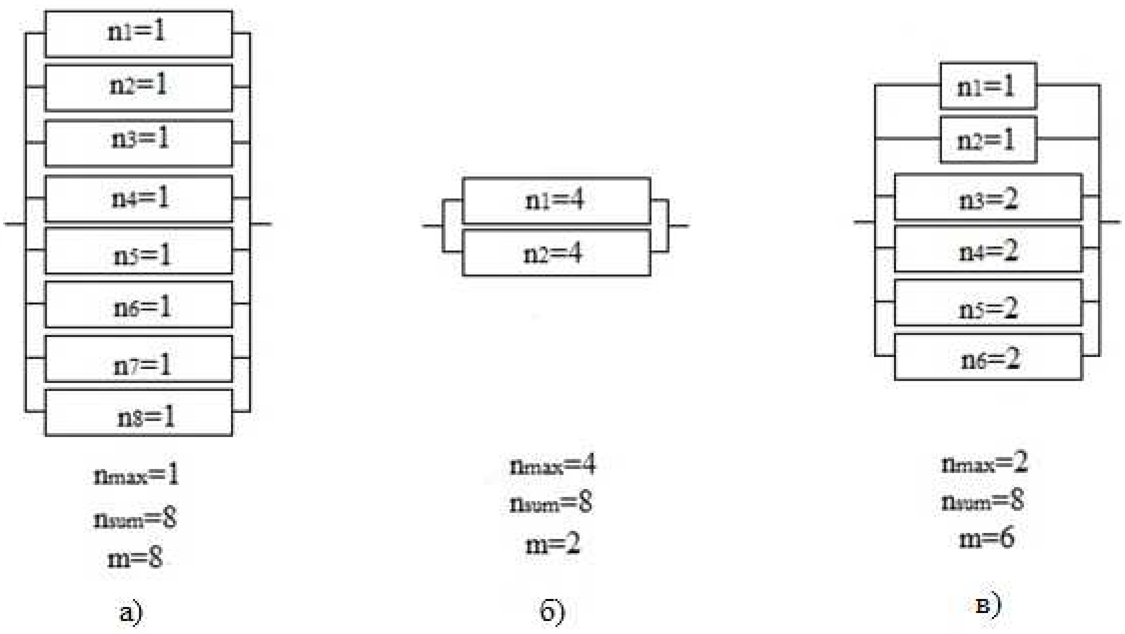

Рис. 1. Способы организации параллельного вычислительного процесса, содержащего 8 операций

Наибольшее ускорение вычислений будет достигнуто на 8 вычислительных процессорах, каждый из которых выполнит одно действие (рис. 1,а). Третий способ распараллеливания (рис. 1,в) даст нам худшую сбалансированность, чем другие два способа, но максимальная цепочка последовательных арифметических операций в этом случае будет короче, чем вслучае (рис. 1,б) с двумя вычислительными процессорами. Вычислим значение КЭП для рассматриваемых случаев:

$$k_1 = \frac{\frac{\sum_i^m n_i}{m} + n_{max}}{2\sum_i^m n_i} = \frac{\frac{8}{8}+1}{2*8} = 0{,}125 \tag{3}$$

$$k_2 = \frac{\frac{8}{6}+2}{2*8} = 0{,}208333 \tag{4}$$

$$k_3 = \frac{\frac{8}{2}+4}{2*8} = 0{,}5 \tag{5}$$

Полученные значения КЭП подтверждают сделанные предположения. Наблюдается следующая тенденция: при увеличении числа вычислителей или степени неравномерности распределения арифметических операций на параллельных вычислителях значение КЭП увеличивается. При этом значения КЭП лежат в интервале:

$$\frac{1}{\sum_i^m n_i} \leq k \leq \frac{n_{max}}{\sum_i^m n_i} \tag{6}$$

Вернемся к первоначальной задаче, составив выражение для приведенного числа действий распараллеленной части решателя с учетом КЭП. Поскольку значение КЭП при ухудшении качества реализации параллельной части решателя стремится к своей правой границе, то наибольшее ускорение вычислений будет достигаться при минимальной разности этих двух величин. Таким образом, приведенное число действий распараллеленной части решателя можно выразить как:

$$s = n_{max} + \frac{n_{max}}{\sum_i^m n_i} - k \tag{7}$$

Данный подход к оценке вычислительной эффективности решателей ОДУ позволяет сравнивать между собой решатели, опирающиеся на численные методы одного порядка алгебраической точности.

Приведем примеры расчета ОВЗАР и КЭП для нескольких решателей, основанных на известных численных методах интегрирования.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \quad x_1(0) = x_{01} \\ \quad x_2(0) = x_{02} \end{cases} \tag{8}$$

Построим решатель, моделирующий систему (8) методом Рунге – Кутты второго порядка (РК2). Блок-диаграмма решателя представлена на рисунке 2.

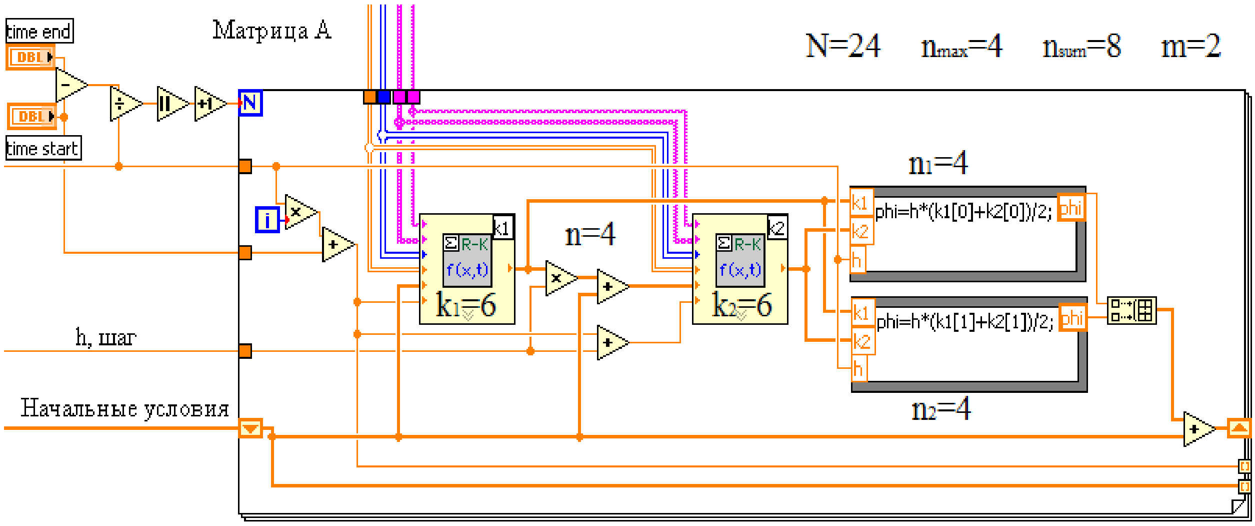

Рис. 2. Блок-диаграмма решателя ОДУ на основе метода РК2

Число арифметических операций N на шаге составит 24, из которых 8 выполняются в распараллеленной части решателя на двух вычислительных процессорах. Длина последовательности, содержащей наибольшее число арифметических операций n_{max}, равна 4. Применим формулы (2) и (7) для вычисления КЭП и приведенного числа действий распараллеленной части рассматриваемого решателя. Значение КЭП составит $k_{\text{РК2}} = 0.5$, а число приведенных действий $s_{\text{РК2}} = 4$. Тогда ОВЗАР по формуле (1) будет равна $f_{\text{РК2}} = 20$.

Рассмотрим решение этой же системы параллельным численным методом интегрирования второго порядка Д2, подробно описанном в работе [2]. Блок-диаграмма решателя, реализующего метод Д2, представлена на рисунке 3.

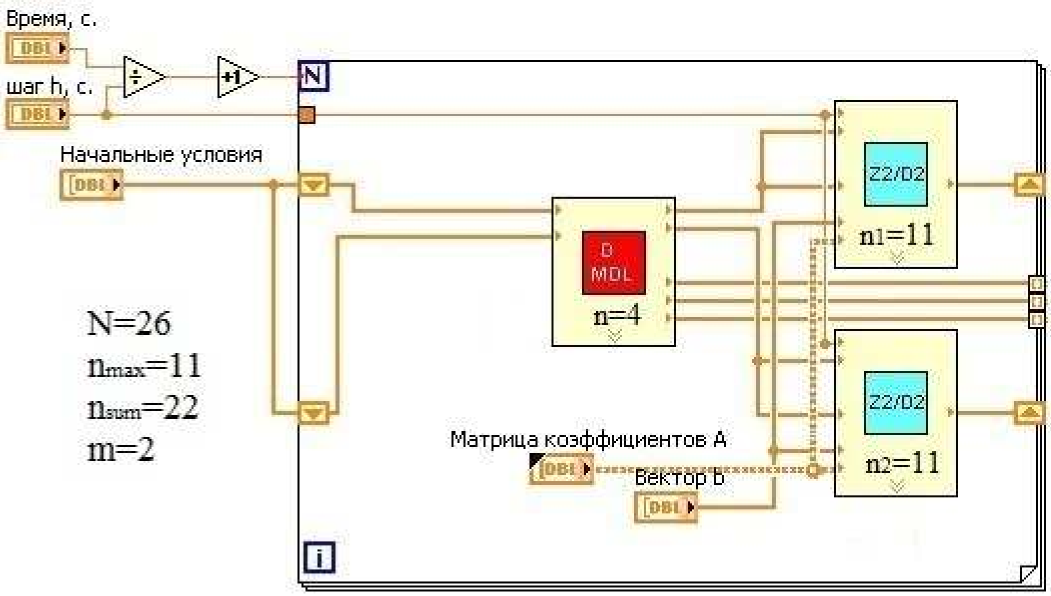

Рис. 3. Решатель на основе параллельного метода Д2

Число арифметических операций на шаге составит 26, из которых 22 выполняются в распараллеленной части решателя на двух вычислительных процессорах. Длина последовательности, содержащей наибольшее число арифметических операций, составляет 11. Используя формулы (2) и (7), вычислим значение КЭП $k_{\text{Д2}} = 0{,}5$ и приведенное число действий распараллеленной части решателя $s_{\text{Д2}} = 11$. Таким образом, ОВЗАР для решателя методам Д второго порядка равна $f_{\text{Д2}} = 15$.

Можно предположить, что для разных решателей ОДУ значение ОВЗАР по-разному изменяется с ростом порядка моделируемой системы. Для проверки данного предположения была проведена серия компьютерных экспериментов в среде LabVIEW. Рассматривались линейные стационарные однородные системы с полностью заполненной матрицей коэффициентов размерностью от 2 до 5. Привести полностью блок-диаграммы всех проанализированных решателей не представляется возможным в связи с ограничениями на объем статьи. Результаты соответствующих экспериментов для решателей, использующих метод РК2 и параллельный метод Д2, сведены в табл. 1. Представлены рассчитанные параметры, использовавшиеся при оценке решателей.

Таблица 1

Изменение ОВЗАР с ростом порядка матрицы коэффициентов

Метод решателя	Размерность матрицы коэффициентов	N	n_{sum}	n_{max}	m	k (КЭП)	s	f (ОВЗАР)
РК2	2х2	24	8	4	2	0,5	4	20
Д2		28	24	12	2	0,5	12	16
РК2	3х3	48	12	4	3	0,333333	4	40
Д2		52	46	23	2	0,5	23	29
РК2	4х4	80	16	4	4	0,25	4	68
Д2		84	76	38	2	0,5	38	46
РК2	5х5	120	20	4	5	0,2	4	104
Д2		130	120	60	2	0,5	60	70

Построим графики зависимости ОВЗАР рассматриваемых методов РК2 и Д2 от порядка матрицы коэффициентов моделируемой системы (рис. 4). В качестве эталона используем число действий на одном шаге интегрирования для явного метода Эйлера первого порядка точности (Forward Euler), как имеющего наименьшие вычислительные затраты среди всех известных численных методов интегрирования ОДУ.

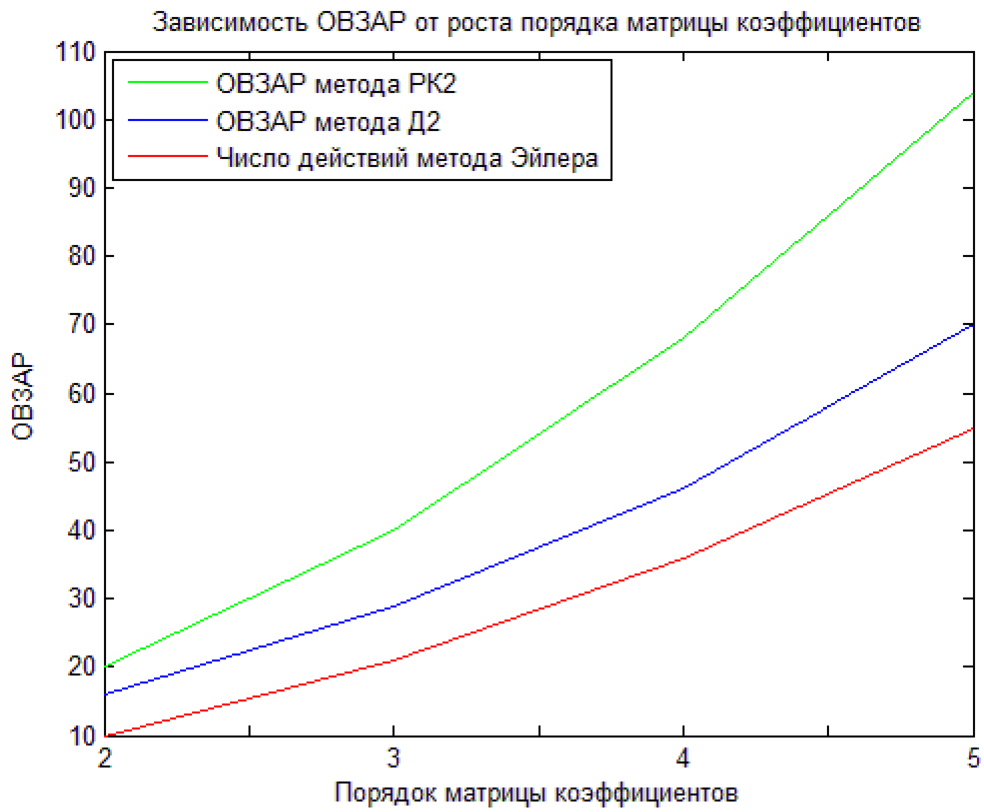

Рис. 4. Зависимость ОВЗАР методов Д2 и РК2 от порядка матрицы коэффициентов моделируемой системы уравнений

Из представленного на рисунке 4 графика видно, что вычислительные затраты метода Д2 растут существенно медленнее, чем у метода РК2, и темпы их роста сопоставимы с таковыми для метода Эйлера. Также можно предположить, что с увеличением порядка системы вычислительная эффективность методов Д будет возрастать быстрее относительно классических методов Рунге – Кутты.

Заключение

Предложенный способ оценки вычислительных затрат решателей обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой эффективный инструмент при анализе подобных алгоритмов с точки зрения вычислительного параллелизма. Применение данного подхода позволяет свести выбор решателя для конкретной задачи Коши к сравнению простых количественных характеристик – коэффициентов ОВЗАР. Это дает возможность разработчикам параллельных численных методов объективно оценивать и сравнивать полученные решения.

Проведенный в статье анализ зависимости вычислительной эффективности различных решателей от порядка моделируемой системы позволяет сделать выводы о том, что рассматриваемый в статье [2] параллельный метод интегрирования ОДУ второго порядка имеет лучшие вычислительные свойства по сравнению с классическими явными методами Рунге – Кутты при таком же порядке алгебраической точности.

Полученные результаты могут быть эффективно использованы при разработке аппаратных решателей ОДУ с параллельной архитектурой, а также цифровых систем управления и обработки сигналов на базе таких решателей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках договора № НК 14-01-31277\14 от 06.02.2014 г.

Список литературы

1. Бутусов Д.Н Автоматизация проектирования встраиваемых систем [Текст]: дис. … канд. техн. наук / СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.
2. Бутусов Д.Н., Каримов А.И., Каримов Т.И., Долгушин Г.К. Семейство аппаратно-ориентированных методов численного интегрирования // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4.
3. Бутусов Д.Н. Синтез и исследование аппаратно-ориентированных численных методов интегрирования в среде LABVIEW // Материалы XIII Международной научно-практической конференции «Инженерные и научные приложения на базе технологий National Instruments – 2014». – М.: МТУСИ.
4. Жуков К.Г. Алгоритм реализации параллельных вычислений по формулам численного интегрирования Рунге-Кутта [Текст] / Научно-технические ведомости санкт-петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – СПБГПУ, 2011.

5. Фельдман Л.П. Параллельные алгоритмы моделирования динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями // Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26, № 1. – С.19-30.

Рецензенты:

Авдеев Б.Я., д.т.н., профессор кафедры информационно-измерительных систем и технологий, ФГАОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург;

Анисимов В.И., д.т.н., профессор кафедры систем автоматизированного проектирования, ФГАОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.