УДК519.86

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Севодин М.А., Козловская Я.И.

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия (614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29), e-mail: black_empire@list.ru

Известные модели составления оптимальной структуры портфеля для расчета доходности ценной бумаги используют единственное суточное измерение ее стоимости. При этом не учитывается тот факт, что стоимость ценной бумаги в течение торгового дня колеблется, достигая минимального и максимального значения. В работе предлагается модель составления оптимальной структуры фондового портфеля с учетом суточных колебаний стоимости акций. Для описания доходностей ценных бумаг используются треугольные нечеткие числа, построенные с учетом изменения цены активов за рассматриваемый период времени. В работе приводится пример использования модели для построения портфеля из семи типов ценных бумаг. Проведено сравнение с обычными методами, которое показало, что предлагаемая модель позволяет составить более эффективный портфель с точки зрения максимизации доходности и минимизации риска инвестиций.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, нечеткие числа, доходность, риск.

USING FUZZY SETS THEORY TO MODELING OPTIMAL STRUCTURE OF INVESTMENT PORTFOLIO

Sevodin M.A., Kozlovskaya Y.I.

Perm National research polytechnic university, Perm, Russia (614990, Perm, Komsomolskiy avenue, 29), e-mail: black_empire@list.ru

Known models of investment portfolio usesingle securityprice in a trade day to calculate security yield. These models ignore the fact that security price varies from minimum to maximum during the trade day. We describe the model of investment portfolio that takes into consideration fluctuation of security price. The model uses fuzzy numbers that based on changing security price duringthe day to describe security yield. For example portfolio of seven types of security was built. The comparison showed that model that uses fuzzy numbers allows to get portfolio with higher yield and lower risk.

Keywords: Investment portfolio, fuzzy numbers, yield, risk.

Целью управления финансовыми активами является достижение определенного экономического эффекта в будущем. В частности, инвестор (держатель фондового портфеля) старается максимизировать доходность и минимизировать риск неэффективности своих инвестиций. Так как будущее состояние активов и их окружения неизвестно, то управление протекает в условиях неопределенности, которая порождает риск неэффективного управления.

Существуют классические подходы к составлению оптимальной структуры портфеля ценных бумаг (ПЦБ), в основе которых лежит рассмотрение доходности ценной бумаги (ЦБ) как статистического случайного процесса, однако используемые в них допущения не вполне согласованы с реальностью фондового рынка.

Основная проблема в том, что процессы, протекающие на фондовом рынке, часто неустойчивы и неоднородны. Неопределенность – неотъемлемое свойство рынка ценных бумаг. Таким образом, нельзя утверждать статистическую однородность случайного процесса доходности ЦБ при классическом понимании вероятности [3]. Вследствие этого вполне логичен вывод, что характер связи между доходами различных типов бумаг не может быть описан статистически.

Здесь следует заметить следующее. В классической модели составления ПЦБ для определения доходности акции используются значения ее цены, снятые единожды в каждый момент времени (например, один раз в течение торгового дня). При этом не учитывается тот факт, что на протяжении торгового дня стоимость акции колеблется в определенном интервале от минимального значения к максимальному. Чтобы учесть размытость исходных данных во времени, уместно использовать для описания доходности ЦБ треугольные нечеткие числа. Для этого нужно модифицировать известную модель построения оптимальной структуры ПЦБ [2] с использованием аппарата нечетких множеств.

Примем в рассмотрение то, что в течение торгового дня стоимость ЦБ изменяется непрерывно, достигая некоего максимального и минимального значения, и дадим определение доходности ценной бумаги как треугольного нечеткого числа.

Пусть для отрезка времени $[t, t+\Delta t]$ определены три параметра i -й бумаги: стоимость в момент открытия торгов ($S_{it}^{откр}$), а также максимальная ($S_{it}^{\max}$) и минимальная ($S_{it}^{\min}$) стоимость, $i=1,\dots,N$, $t=1,\dots,T$, здесь N – число рассматриваемых видов ценных бумаг, T – число наблюдений. Тогда максимальная доходность ЦБ i – отношение максимально возможной прибыли за выбранный период, полученной инвестором за время владения ценной бумагой, к затратам на её приобретение:

$$R_{it}^{\max} = \frac{S_{it}^{\max} - S_{it}^{откр}}{S_{it}^{откр}} \tag{1}$$

Аналогично, минимальная доходность ЦБ – отношение минимально возможной прибыли за выбранный период, полученной инвестором за время владения ценной бумагой, к затратам на её приобретение:

$$R_{it}^{\min} = \frac{S_{it}^{\min} - S_{it}^{откр}}{S_{it}^{откр}} \tag{2}$$

Исходя из этого, можно представить доходность ценной бумаги в момент времени t в виде треугольного нечеткого числа:

$$\tilde{R}_{it} = \left\langle R_{it}^{\min}, R_{it}, R_{it}^{\max} \right\rangle, \tag{3}$$

где $R_{it} = \dfrac{R_{it}^{\max} - R_{it}^{\min}}{2}$.

Функция принадлежности такого числа имеет треугольный вид (рис. 1).

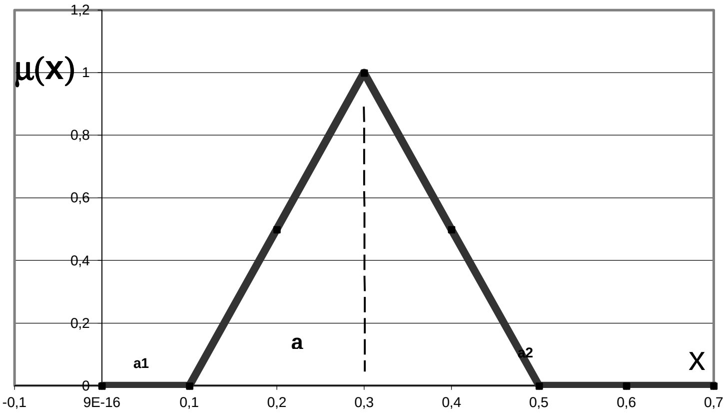

Рис. 1. Функция принадлежности треугольного нечеткого числа

В нечеткой арифметике операции над нечеткими числами вводятся через операции над функциями принадлежности. При этом используется понятие *уровня принадлежности* α (α-уровня) как ординаты функции принадлежности нечеткого числа. Тогда пересечение функции принадлежности с нечетким числом дает пару значений, которые принято называть *границами интервала достоверности*. Основные операции с нечеткими числами сводятся к операциям с действительными числами – четкими значениями (степень принадлежности которых равна единице) и границами интервалов. Подробно с операциями над нечеткими числами можно ознакомиться в [4].

Если мы имеем дело с историей котировок ЦБ за некоторый временной промежуток, то, представляя ее доходность в виде (3) в каждый момент времени, получим нечетко-случайную величину доходности ЦБ. Для нечетко-случайных величин, как и для обычных случайных величин, определены понятия математического ожидания и дисперсии [5]. Так, ожидаемая доходность акции i, учитывая правило сложения треугольных нечетких чисел, рассчитывается следующим образом:

$$\tilde{E}(R_i)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{R}_{it}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\langle R_{it}^{\min},R_{it},R_{it}^{\max}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{it}^{\min},\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{it},\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{it}^{\max}\right\rangle \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{E}(R_i)=\tilde{m}_i=\left\langle m_i^{\min},m_i,m_i^{\max}\right\rangle$$

$$m_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{it},\quad m_i^{\min}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{it}^{\min},\quad m_i^{\max}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{it}^{\max}$$

Тогда элемент матрицы к вариации $\tilde{\nu}_{ij}$ доходностей акций также является нечетким числом и имеет вид:

$$\tilde{\nu}_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\tilde{R}_{it} - \tilde{m}_i)(\tilde{R}_{jt} - \tilde{m}_j) =$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\langle R_{it}^{\min} - m_i^{\max}, R_{it} - m_i, R_{it}^{\max} - m_i^{\min}\right\rangle\left\langle R_{jt}^{\min} - m_j^{\max}, R_{jt} - m_j, R_{jt}^{\max} - m_j^{\min}\right\rangle \quad (5)$$

Будущая доходность портфеля $\tilde{m}_p$ представляется нечеткой функцией, поскольку нечеткими являются значения доходностей ЦБ, входящих в него:

$$\tilde{m}_p = \sum_{i=1}^{N}\tilde{m}_i k_i \quad (6)$$

Риск портфеля $\tilde{\sigma}_p^2$ также является нечеткой функцией вида

$$\tilde{\sigma}_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{\nu}_{ij} k_i k_j \quad (7)$$

Для нахождения оптимальной структуры портфеля будем максимизировать функцию

$$\tilde{\theta} = \frac{\tilde{m}_p}{\tilde{\sigma}_p} = \frac{\left\langle m_p^{\min}, m_p, m_p^{\max}\right\rangle}{\left\langle \sigma_p^{\min}, \sigma_p, \sigma_p^{\max}\right\rangle} = \left\langle \frac{m_p^{\min}}{\sigma_p^{\max}}, \frac{m_p}{\sigma_p}, \frac{m_p^{\max}}{\sigma_p^{\min}}\right\rangle = \left\langle \theta_{\min}, \theta, \theta_{\max}\right\rangle, \quad (8)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = 1, \quad (9)$$

где k_i – доля портфеля, инвестированная в ЦБ типа i.

Функция $\tilde{\theta}$ является нечеткой функцией четкого аргумента, поскольку инвестор желает совершенно точно знать, в каком количестве ему следует приобретать ЦБ каждого вида, чтобы составить свой фондовый портфель. Заметим, что дифференцирование треугольной нечеткой функции проводится по правилам вещественного дифференцирования [1].

Наша нечеткая функция задана в виде $\tilde{\theta} = \left\langle \theta_{\min}, \theta, \theta_{\max}\right\rangle$. В таком случае дифференцирование по аргументам k_s будем производить следующим образом:

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial k_s} = \left\langle \frac{\partial\theta_{\min}}{\partial k_s}, \frac{\partial\theta}{\partial k_s}, \frac{\partial\theta_{\max}}{\partial k_s}\right\rangle, \quad s = 1,\dots,N \quad (10)$$

С помощью дифференцирования и преобразований, аналогичных проведенным в [2], получим системы n линейных неоднородных уравнений с нечеткими коэффициентами для среднего, левого граничного и правого значения функции $\tilde{\theta}$. Также воспользуемся понятием α-уровня нечеткого числа, т.е. представим

$$\tilde{m}_s = \left\langle m_s^{\min}(\alpha), m_s(\alpha), m_s^{\max}(\alpha) \right\rangle; \tilde{\nu}_s = \left\langle \nu_s^{\min}(\alpha), \nu_s, \nu_s^{\max}(\alpha) \right\rangle;$$

$$\tilde{\nu}_{sj} = \left\langle \nu_{sj}^{\min}(\alpha), \nu_{sj}, \nu_{sj}^{\max}(\alpha) \right\rangle.$$

С учетом такого представления системы принимают вид:

$$-z_s \nu_s^{\;2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{N} z_s \nu_{sj}^{\;2} + m_s = 0, \quad \text{s=1,...,N} \tag{11}$$

$$-z_s^{\min} \nu_s^{\min^2}(\alpha) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{N} z_s^{\min} \nu_{sj}^{\min^2}(\alpha) + m_s^{\min}(\alpha) = 0, \quad \text{s=1,...,N} \tag{12}$$

$$-z_s^{\max} \nu_s^{\max^2}(\alpha) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{N} z_s^{\max} \nu_{sj}^{\max^2}(\alpha) + m_s^{\max}(\alpha) = 0, \quad \text{s=1,...,N} \tag{13}$$

Для каждого конкретного α-уровня эти три системы содержат только четкие числа и могут быть решены относительно z_s, $z_s^{\min}$ и $z_s^{\max}$. Затем для каждой системы могут быть найдены доли k_s, $k_s^{\min}$, $k_s^{\max}$ ценных бумаг, из которых составляется портфель:

$$k_s = \frac{z_s}{\sum_{i=1}^{N} z_i}, \quad k_s^{\min} = \frac{z_s^{\min}}{\sum_{i=1}^{N} z_i^{\min}}, \quad k_s^{\max} = \frac{z_s^{\max}}{\sum_{i=1}^{N} z_i^{\max}} \tag{14}$$

Нижняя граница α-уровня, то есть его минимальное рассматриваемое значение, задается экспертом самостоятельно. В нашей работе мы приняли $\alpha_{\min} = 0,85$.

Для демонстрации описанной модели составим ПЦБ из нескольких видов ценных бумаг, определим его оптимальную структуру и сравним его характеристики (доходность, риск, критерий эффективности, равный отношению доходности к риску) с портфелем, составленным по известной вероятностной модели [2].

Для построения портфеля ценных бумаг по предложенной модели были взяты данные за апрель – май 2014 г. о ценных бумагах семи из пятидесяти предприятий, на основании стоимости которых строится индекс РТС. Были рассмотрены четыре суточных показателя:

стоимость бумаги в момент открытия торгов, в середине торгового дня, а также максимальная и минимальная ее стоимость в течение торгового дня.

С данными о стоимостях акций этих предприятий можно ознакомиться на сайте электронного ресурса [6], в разделе «РТС». На основе этих данных по формуле (4) были рассчитаны доходности ценных бумаг (таблица 1). В столбце $\overline{R}$ содержатся значения доходностей, вычисленные по [2] с использованием единственного измерения стоимости цены акций в середине торгового дня.

Таблица 1. Доходности ЦБ

Предприятие	$m_{\min}$	m	$m_{\max}$	$\overline{R}$
ОАО Сбербанк России	0,001201	-0,013438	0,015840	0,000907
ОАО Мобильные ТелеСистемы	0,004038	-0,008393	0,016468	0,002579
ОАО Мегафон	0,001779	-0,007704	0,011262	0,001242
ОАО Магнит	0,000554	-0,014184	0,015292	0,002529
ОАО Северсталь	0,003785	-0,014539	0,022110	0,001204
ОАО Газпром	0,002982	-0,006314	0,012278	0,002116
ОАО АК Транснефть	0,002474	-0,007497	0,012446	0,001828

С помощью представленного выше алгоритма были найдены доли ЦБ k_s, $k_s^{\min}$, $k_s^{\max}$, $s=1,\ldots,N$ для всех $\alpha=[0{,}85;1]$. Затем, по формуле (8), для каждого α были определены значения $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$. Наконец, на базе этих значений была построена функция принадлежности $\tilde{\theta}$ (рис. 2).

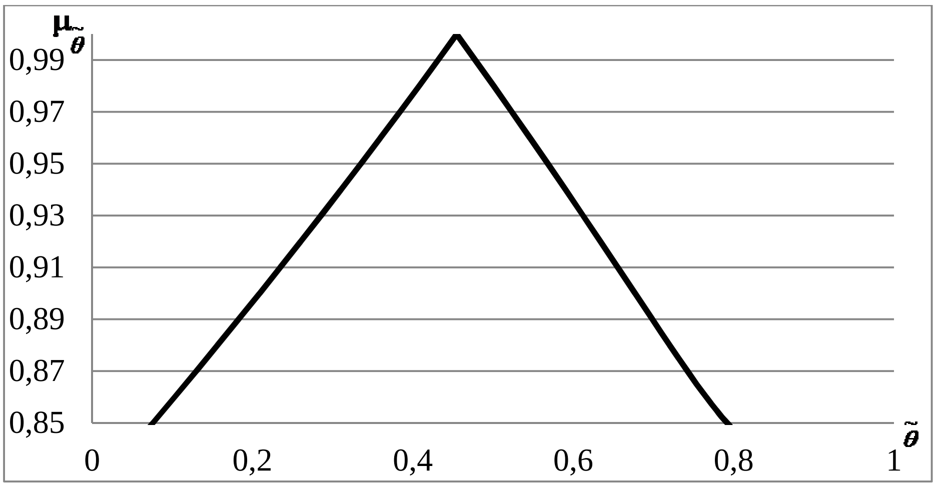

Рис. 2. Функция принадлежности критерия эффективности портфеля

Максимум функции принадлежности $\mu_{\tilde{\theta}} = 1$ соответствует наиболее достоверному значению $\theta^* = 0.45477$. Оно является вещественным числом, т.е. можно однозначно определить структуру ПЦБ, соответствующую такому θ^*, причем она будет оптимальной. Доли ЦБ в итоговом портфеле, соответствующем максимальному критерию эффективности по предложенной нечеткой модели, распределились следующим образом (таблица 2). Также таблица содержит доли ЦБ в портфеле, структура которого рассчитана по известной вероятностной модели.

Таблица 2. Доли ЦБ в итоговом портфеле

Предприятие	Доля ЦБ в портфеле	
	Нечеткая модель	Вероятностная модель
ОАО Сбербанк России	0,1560	0,1261
ОАО Мобильные ТелеСистемы	0,1337	0,2652
ОАО Мегафон	0,2910	0,1738
ОАО Магнит	0,1319	0,1377
ОАО Северсталь	0,0772	0,0597
ОАО Газпром	0,0600	0,1202
ОАО АК Транснефть	0,1502	0,1173

Главные характеристики портфелей, полученных по обеим моделям, приведены в таблице 3.

Таблица 3. Характеристики портфелей

Характеристика	Значение	
	Нечеткая модель	Вероятностнаямодель
Доходность	0,00216	0,00190
Риск	0,004752	0,005471
Критерий эффективности	0,45477	0,34784

Из таблицы видно, что ПЦБ, составленный в соответствии с предложенной в данной работе моделью, имеет большую доходность и меньший риск, в сравнении с тем, который составлен по известной вероятностной модели. Таким образом, модель с использованием нечетких чисел дает более эффективный портфель, чем известная модель, с точки зрения выбранного критерия (отношение доходности портфеля к его риску). Это обуславливается тем, что в рассмотрение принято не одно конкретное значение стоимости ценной бумаги из какого-то временного интервала, а описание изменения стоимости за некоторый промежуток времени в виде треугольного нечеткого числа. Таким образом, на основании данной работы можно с определенной степенью уверенности утверждать, что применение теории нечетких чисел позволяет получить более эффективные результаты при оптимизации ПЦБ по сравнению с результатами, установленными на основе других известных методик.

Список литературы

1. Ибрагимов В.А. Элементы нечеткой математики. – Баку: Изд-во АГПУ, 2010. – 392 с.
2. Лукашин Ю.П. Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. – 1995. – Т. 31. – Вып. 1. – С.138-150.
3. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. – СПб.: Изд. Сезам, 2002. – 181 с.
4. Хижняков Ю.Н. Нечеткое, нейронное и гибридное управление: учебное пособие. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. – 302 с.
5. Шведов А.С. О нечетко-случайных величинах. – М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2013. – 28с.
6. Компоненты РТС [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.investing.com/indices/rtsi-components (дата обращения 01.06.2014).

Рецензенты:

Роговой А.А., д.ф.-м.н., профессор, научный сотрудник Института механики сплошных сред, г. Пермь;

Перский Ю.К., д.э.н., профессор Пермского национального исследовательского политехнического университета, г. Пермь.