УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ МАКРОСВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ, АРМИРОВАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ

Горынин Г.Л.[1], Власко А.Ф.[1]

[1]ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет Ханты-Мансийского автономного округа - Югры», Сургут, Россия (628403, Сургут, проспект Ленина, д. 1), e-mail: vlasko.a.f@yandex.ru

Используется метод ячейковых функций, позволяющий определять механические макрохарактеристики материалов, периодически армированных решетками. Метод основан на асимптотическом расщеплении пространственной задачи теории упругости, без построения моделей и введения дополнительных гипотез. Механические макрохарактеристики определяются как интегралы от ячейковых функций. Ячейковые функции являются решением семейства краевых задач, поставленных на единичной ячейке с периодическими граничными условиями. Единичная периодическая ячейка представляет собой один период, в плоскости, функции механических свойств композита. В результатах работы представлены, рассчитанные численно, зависимости значений механических макрохарактеристик от толщины армирующей решетки, для двух типов армирования: тетрагональная решетка, гексагональная решетка. Продемонстрирована нелинейность этой зависимости, а также существенное различие механических макрохарактеристик для двух типов армирования. Проведено сравнение макрохарактеристик, рассчитанных по методу ячейковых функций с результатами, приведенными в работах Ю.В. Немировского.

Ключевые слова: математическое моделирование, механические макрохарактеристики, периодические композитные материалы.

MATHEMATICAL MODELING OF MECHANICAL MACROPROPERTIES MATERIALS REINFORCED BY PERIODIC LATTICE

Gorynin G.L.[1], Vlasko A.F.[1]

[1]Surgut State University Khanty-Mansiysk Autonomous Okrug - Ugra, Surgut, Russia (628403, Surgut, Lenin Avenue, d. 1), e-mail: vlasko.a.f@yandex.ru

Used method of cellular functions, which allows to determine the mechanical macrocharacteristics materials periodically reinforced by lattice. The method is based on the asymptotic decomposition of the spatial problem of elasticity, without building models and the introduction of additional hypotheses. Mechanical macrocharacteristics defined as integrals of cellular functions. Valium family are the solution of boundary value problems posed on the unit cell with periodic boundary conditions. A unit cell is a periodic one period, in a plane mechanical properties of the composite function. In the results of the presented calculated numerically, depending on the values of mechanical macrocharacteristics the thickness of the reinforcing by lattice, for two types of reinforcement: a tetragonal lattice, hexagonal lattice. Demonstrated the non-linearity of this relationship, as well as a significant difference mechanical macrocharacteristics for two types of reinforcement. A comparison macrocharacteristics calculated by the method of cellular functions with the results presented in the works of YV Nemirovski.

Keywords: mathematical modeling, mechanical macrocharacteristics, periodic composite materials

Функция физических свойств материала, в плоскости Oxy, является 2-периодической; плоскость можно представить состоящей из множества одинаковых прямоугольников – ячеек (рис. 1,2). Макросвойства - механические свойства однородного макроматериала эквивалентного композитному периодическому материалу.

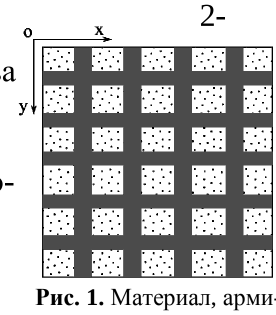

Рис. 1. Материал, армированный периодической решеткой

Постановка задачи

На конструкцию, изготовленную из материала, армированного периодической решеткой (рис. 1.), действует некоторая система нагрузок.

В каждой точке конструкции выполняются уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial x}\varepsilon+\frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial y}\varepsilon+\frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z}\varepsilon+F_{\alpha}=0,\ \alpha=\{x,y,z\} \tag{1}$$

где F_{α} - объемные силы, а $\sigma_{\alpha\beta}$ - напряжения, определяющиеся по закону Гука для анизотропной среды:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sum_{\phi,\varphi\in\{x,y\}}\mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}\frac{\partial(u_{\phi})}{\partial\varphi}\varepsilon,\ \alpha,\beta\in\{x,y,z\} \tag{2}$$

где $E=\lfloor E_{\alpha\beta\varphi\psi}\rfloor$- тензор упругости, который внутри каждой упругой среды непрерывно меняется, а на границах сред претерпевает скачки. Уравнения (1)-(2) обезразмерены по правилам:

$$x\leftrightarrow x/L,\ y\leftrightarrow y/L,\ z\leftrightarrow z/L,\ u_{\alpha}\leftrightarrow u_{\alpha}/h,\ \mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}\leftrightarrow \mathrm{E}_{\alpha\beta\varphi\psi}/\tilde{\mathrm{E}},$$
$$\sigma_{\alpha\beta}\leftrightarrow\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\tilde{E}},\ q_{\alpha}\leftrightarrow\frac{q_{\alpha}}{\tilde{E}},\ \tilde{F}_{\alpha}=\frac{F_{\alpha}h}{\tilde{E}}. \tag{3}$$

$$\varepsilon=\frac{h}{L}<<1 \tag{4}$$

где h - размер ячейки, L - характерный размер тела.

На границе перехода от одной упругой среды к другой непрерывны перемещения и контактные напряжения:

$$[\sigma_{\alpha n}]=0,\ [u_{\alpha}]=0,\ \alpha=\{x,y,z\} \tag{5}$$

где $\sigma_{\alpha n}$- контактные напряжения, которые по определению вычисляются по следующей формуле

$$\sigma_{\alpha n}=\sigma_{\alpha x}n_x+\sigma_{\alpha y}n_y+\sigma_{\alpha z}n_z. \tag{6}$$

Заданы граничные условия.

В ячейке вводится локальная система координат $\xi_y,\xi_y\in[0,1]$, координатные оси параллельны осям глобальной системы координат (рис. 2).

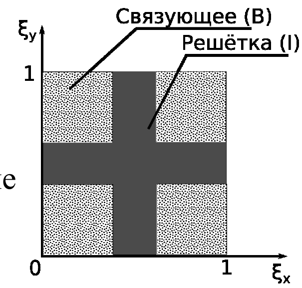

Рис. 2. Периодическая ячейка

Асимптотическое приближение решения краевой задачи (1)-(6) в соответствии с работой 1 имеет вид при условии $\varepsilon<<1$:

$$(u_{\alpha})^{(n)}=v_{\alpha}^{(n)}+\sum_{\varphi\in\{x,y,z\}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k}\left(U_{\alpha}^{v_{\varphi}}\right)^{\bar{k}}\frac{\partial^k v_{\varphi}^{(n)}}{\partial\bar{r}^{\bar{k}}}\varepsilon^k\right), \tag{7}$$

$$\alpha\in\{x,y,z\}$$

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}\right)^{(n)} = \sum_{\varphi\in\{x,y,z\}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\varphi}\right)^{\bar{k}} \frac{\partial^k v_\varphi^{(n)}}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon^k \right), \quad \alpha,\beta \in \{x,y,z\} \tag{8}$$

здесь n - номер асимптотического приближения, v_α - решение для тела, состоящего, из макроматериала, $\left(U_\alpha^\eta\right)^{\bar{k}}$ - периодическая компонента решения (ячейковые перемещения), $\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)^{\bar{k}}$ - ячейковые напряжения, $\bar{k}$ - вектор, определяемый таким образом:

$$\begin{gathered} \bar{k} = \left(k_x, k_y, k_z\right) = k_x\bar{e}_x + k_y\bar{e}_y + k_z\bar{e}_z, \left|\bar{k}\right| = k = k_x + k_y + k_z, \\ \partial\bar{r}^{\bar{k}} = \partial x^{k_x} \partial y^{k_y} \partial z^{k_z}, \ k_\alpha \geq 0, \ k_\alpha \in Z \end{gathered} \tag{9}$$

Для определения макрохарактеристик необходимо найти периодическую компоненту решения. Ячейковые перемещения определяются решением девять краевых задач, для $\theta, \lambda \in \{x, y, z\}$:

$$\frac{\partial(\tau_{\alpha x}^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}}{\partial \xi_x} + \frac{\partial(\tau_{\alpha y}^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}}{\partial \xi_y} = 0, \ \alpha = \{x, y, z\} \tag{10}$$

закон упругости на ячейке –

$$(\tau_{\alpha\beta}^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda} = E_{\alpha\beta\theta\lambda} + \sum_{\phi,\varphi\in\{x,y\}} E_{\alpha\beta\phi\varphi} \frac{\partial(U_\phi^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}}{\partial \xi_\varphi} + \sum_{\varphi\in\{x,y\}} E_{\alpha\beta z\varphi} \frac{\partial(U_z^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}}{\partial \xi_\varphi} \qquad 11)$$

условия непрерывности ячейковых функций внутри ячейки на границе различных сред –

$$\left[(\tau_{\alpha n}^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}\right] = 0, \ \left[(U_\alpha^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}\right] = 0; \tag{12}$$

условие периодичности ячейковых функций –

$$\begin{gathered} (U)_\alpha^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\chi=0} = (U)_\alpha^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\chi=1}, \\ (\tau_{\alpha\chi}^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\chi=0} = (\tau_{\alpha\chi}^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\chi=1}, \chi \in \{x, y\}; \end{gathered} \tag{13}$$

условие нормировки решения –

$$\left\langle (U_\alpha^{v_\theta})^{\bar{e}_\lambda} \right\rangle = 0, \tag{14}$$

где $\langle \_ \rangle$ - интеграл от какой-то величины по ячейковым переменным, взятый по всей ячейке, усреднение этой величины по ячейке:

$$\langle \_ \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \_ \, d\xi_x d\xi_y. \tag{15}$$

Решением девяти краевых задач (10)-(13) являются восемнадцать ячейковых перемещений $(U_{\alpha}^{\nu_\theta})^{\bar{e}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)$, для них выполняются равенства:

$$(U_{\alpha}^{\nu_\theta})^{\bar{e}_\lambda} = (U_{\alpha}^{\nu_\lambda})^{\bar{e}_\theta},\ (\tau_{\alpha\beta}^{\nu_\theta})^{\bar{e}_\lambda} = (\tau_{\alpha\beta}^{\nu_\lambda})^{\bar{e}_\theta}, \\ \alpha, \beta, \lambda, \theta \in \{x, y, z\}. \tag{16}$$

То есть, необходимо решить не девять, а шесть краевых задач (10)-(13).

Из решений краевых задач (10)-(13) вычисляются макрохарактеристики материала (обозначение – волнистая верхняя черта) по формуле:

$$\widetilde{E}_{\alpha\beta\theta\lambda} = \left\langle E_{\alpha\beta\theta\lambda} \right\rangle + \\ + \left\langle \sum_{\phi,\varphi \in \{x,y\}} E_{\alpha\beta\phi\varphi} \frac{\partial (U_{\phi}^{\nu_\theta})^{\bar{e}_\lambda}}{\partial \xi_\varphi} + \sum_{\varphi \in \{x,y\}} E_{\alpha\beta z\varphi} \frac{\partial (U_{z}^{\nu_\theta})^{\bar{e}_\lambda}}{\partial \xi_\varphi} \right\rangle, \\ \alpha, \beta, \theta, \lambda \in \{x, y, z\}. \tag{17}$$

Выведение формул для макрохарактеристик в случае 3-периодической композитной среды приведено в работе [3].

Результаты

Построены зависимости упругих свойств макроматериала от коэффициента армирования для композитных материалов армированных решетками двух форм: тетрагональной (рис. 3а) и гексагональной (рис. 3б). Свойства материалов: модуль Юнга связующего 40 МПа, коэффициент Пуассона связующего 0.35, модуль Юнга решетки 393 МПа, коэффициент Пуассона 0.4. Что примерно соответствует структуре грунт-георешётка.

Эти зависимости представлены на рисунках 5-10. Значения макросвойств армированного грунта получены по формуле (17), ячейковые функции получены решением краевых задач (10)-(13) методом конечных элементов.

Коэффициент армирования (КА) – отношение площади сечения решетки к общей площади ячейки.

$$\Theta^I = \frac{S^I}{S}, \tag{18}$$

S^I - площадь сечения решетки, S - площадь ячейки. Площадь сечения решетки изменяется варьированием толщины d.

В работах [1], [2] приведены аналогичные зависимости для материалов, армированных волокнами. В таблице 1 представлен расчет макросвойств для композитного материала армированного тетрагональной решеткой при КА = 0.009975. В первом столбце макросвойства рассчитаны по формулам из статьи [3], во втором по формулам из статьи [4]. В третьем, макросвойства рассчитаны числено, методом ячейковых функций из данной статьи.

Четвертый столбец – среднее арифметическое свойств материалов, входящих в состав композита.

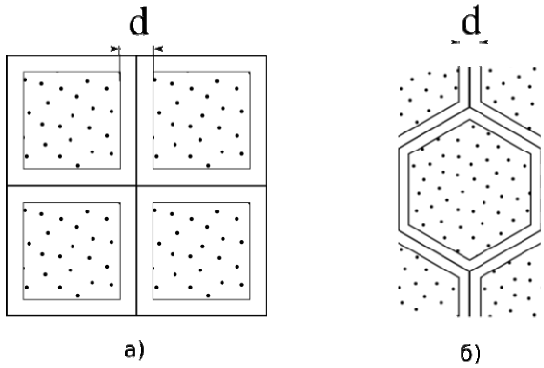

Рис. 3. Типы армирующих решеток: а) тетрагональная, б) гексагональная.

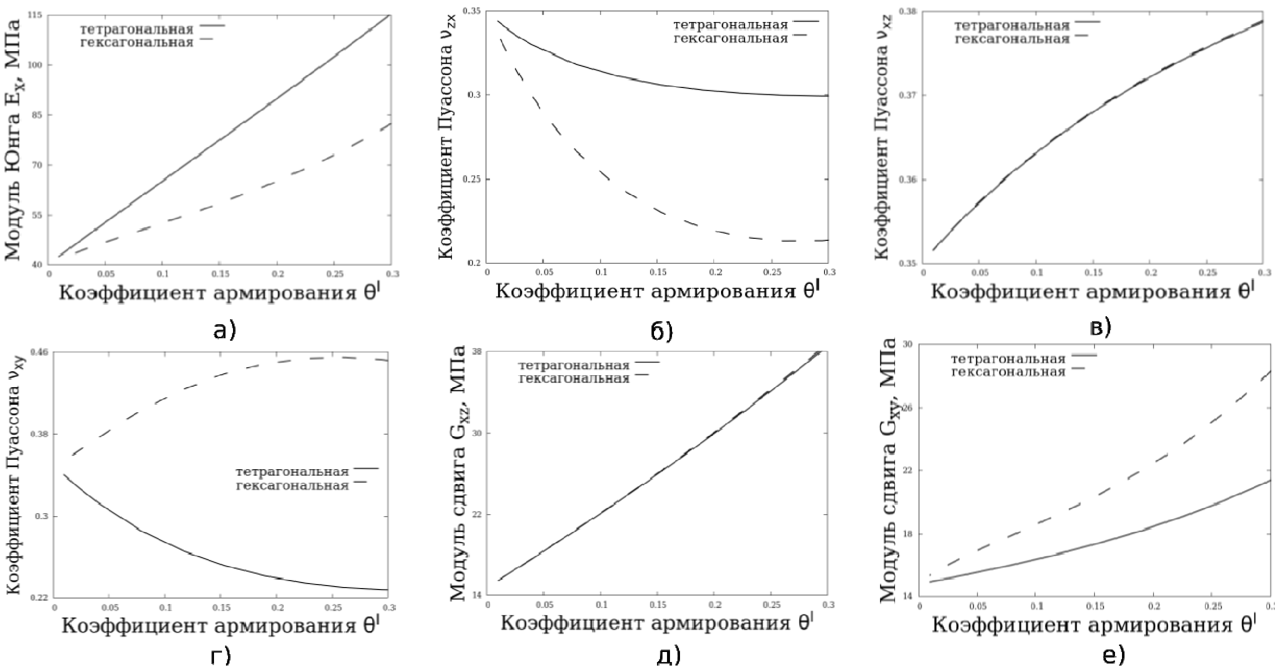

Рис. 4. Зависимость механических макросвойств от коэффициента армирования: а) Модуль Юнга $\tilde{E}_x$, б) Коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}_{zx}$, в) Коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}_{xz}$, г) Коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}_{xy}$, д) Модуль сдвига $\tilde{\mu}_{xy}$, е) Модуль сдвига $\tilde{\mu}_{xz}$.

Таблица 1

Механические макросвойства, рассчитанные различными методами, при коэффициенте армирования 0.009975

Упругие константы	Методы расчета			
	Кинематический [3]	Статический [4]	Ячейковых функций	Среднее арифметическое
$\tilde{E}_x = \tilde{E}_y$	42.57	43.56	42.56	43.52

$\tilde{E}_z$	43.54	43.54	43.53	43.52
$\tilde{\nu}_{xy}$	0.34	0.34	0.34	0.35
$\tilde{\nu}_{xz} = \tilde{\nu}_{yz}$	0.35	0.35	0.35	0.35
$\tilde{\mu}_{xy}$	14.95	14.95	14.95	16.11
$\tilde{\mu}_{xz}$	15.51	15.51	15.51	16.11

Заключение

Из графиков на рис. 4 видно, что макросвойства композита зависят от коэффициента армирования не линейно. Функции зависимостей для материалов, армированных решетками разной формы, различаются существенно.

Различие модулей Юнга в плоскости Оху макроматериалов, для двух форм решеток, терагональной и гексагональной, при одном и том же коэффициенте армирования, достигает 20%_(рис. 4а). Различие коэффициентов Пуассона $\tilde{\nu}_{zx}$ достигает 30%_(рис. 4б). Коэффициенты Пуассона $\tilde{\nu}_{xz}$ и модули сдвига $\tilde{\mu}_{xz}$ для обоих типов решеток практически совпадают (рис. 4в, 4д). Различие коэффициентов Пуассона $\tilde{\nu}_{xy}$ достигает 48% (рис. 4г). Различие модулей сдвига $\tilde{\mu}_{xy}$ достигает 24%_(рис. 4д).

Из таблицы (1) вино, что макросвойства композитного материала, армированного тетрагональной сеткой, с коэффициентом армирования 0.009975, рассчитанные при помощи различных методов, отличаются от среднего арифметического свойств материалов входящих состав композита не существенно (7% для $\tilde{\mu}_{xy}$). Следовательно, в данном случае, т.е. в случае примера, взятого из работ [3], [4], для получения истинных макросвойств композита достаточно вычисления среднего арифметического свойств материалов, входящих в его состав, без решения каких-либо вспомогательных задач, возникающих в рамках используемой модели.

Список литературы

1. Власко А.Ф., Горынин Г.Л. Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для волокнистых материалов при расчете конструкций транспортных сооружений // Вестник СибАДИ.– 2013.– №1(29).– С.58-64
2. Власко А.Ф., Горынин Г.Л. Исследование зависимости упругих макрохарактеристик для волокнистых материалов от механических и геометрических свойств армирующих волокон // VI Всероссийская конференция «Актуальные вопросы строительства»: труды [Элек-

тронный ресурс]. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2013.– 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).– С. 237-244.
3. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Метод асимптотического расщепления для упругой 3-периодической среды // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика [Электронный ресурс] / Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, Новосибирск, Россия, 30 мая – 4 июня 2011 г., Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2011, № гос. регистрации – 0321101160.
4. Немировский, Ю.В., Янковский А. П. Кинетический метод определения эффективных термоупругих характеристик грунта, армированного пространственной // Изв. вузов. Строительство.– 2007.– №6.– С. 18-26.
5. Немировский, Ю.В., Янковский А. П.Статический метод определения эффективных термоупругих характеристик грунта, армированного пространственной // Изв. вузов. Строительство.– 2008.– №5.– С. 8-13.

Рецензенты:

Острейковский В.А., д.т.н., профессор кафедры информатики и вычислительной техники СурГУ, ГБОУ ВПО Сургутский государственный университет ХМАО – Югры, г. Сургут.

Нехорошев В.П., д.т.н., профессор кафедры химии СурГУ, ГБОУ ВПО Сургутский государственный университет ХМАО – Югры, г. Сургут.