УДК 519.65

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рагимханова Г.С.[1], Рагимханова Д.Р.[2], Гасанбекова Е.М.[1]

[1] *ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный педагогический университет», г. Махачкала, Россия, e-mail: gulnara_6789@mail.ru*
[2] *МБОУ СОШ № 46, г. Махачкала, Россия, e-mail: gulnara_6789@mail.ru*

Численными методами аппроксимированы функции, являющиеся решениями дифференциальных уравнений, получаемые в качестве моделей технических задач и допускающие разложения в цепную дробь. Разработана программа на языке Turbo Pascal для нахождения значений гиперболических функций sh x, chx и th x с использованием подходящих дробей цепных дробей и указаны приближенные значения данных функций с точностью до двенадцатого знака. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях, связанных с разложениями функций в цепные дроби, при численном решении дифференциальных уравнений, где вопросы скорости сходимости играют важную роль. Они представляют интерес для специалистов по математической и теоретической физике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, специальным функциям математической физики и их приложениям. Полученные результаты могут применяться при численном анализе математических моделей различных естественнонаучных задач, связанных с динамикой явления.

Ключевые слова: цепная дробь, гиперболические функции, приближение.

THE APPROXIMATION OF THE HYPERBOLIC FUNCTIONS CHAIN FRACTIONS USING A PROGRAMMING ENVIRONMENT

Ragimkhanova G.S.[1], Ragimkhanova D.R.[2], Gasanbekova E.M.[1]

[1] *Dagestan state pedagogical University, Makhachkala, Russia, e-mail: gulnara_6789@mail.ru*
[2] *School No. 46, Makhachkala, Russia, e-mail: gulnara_6789@mail.ru*

Numerical methods approximated functions which are solutions of the differential equations obtained as models of engineering problems and allow decomposition into a continued fraction. Developed a program in Turbo Pascal for finding the values of the hyperbolic functions sh x, chx and th x using the appropriate fractions continued fractions and indicated the approximate values of these functions with accuracy up to the twelfth sign. The obtained results can be used in further studies related to the expansion of functions in continued fractions, for the numerical solution of differential equations, where the issues of speed of convergence plays an important role. They are of interest for specialists in mathematical and theoretical physics, mathematical analysis, differential equations, special functions of mathematical physics and their applications. The obtained results can be used in numerical analysis of mathematical models of various scientific problems associated with the dynamics of the phenomenon.

Keywords: a continued fraction, hyperbolic functions, approximation.

1. Цепные дроби являются одним из аппаратов приближения функций. Они обладают замечательным свойством малого накопления погрешности при их вычислении.

Цепной (непрерывной) дробью называется выражение вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\quad \frac{a_2}{b_2 +} \dots \frac{a_n}{b_n +} \dots = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \qquad (1)$$

элементы $b_0, b_1, \dots; a_1, a_2, \dots$ цепной дроби (1) могут быть числами (вещественными или комплексными), функциями (одной или многих переменных) [5].

Выражение

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\frac{a_1}{b_1+}\dots\frac{a_n}{+b_n}$$

называется подходящей дробью (порядка n) цепной дроби (1). P_n называется числителем, Q_n – знаменателем подходящей дроби P_n/Q_n. Цепная дробь (1) называется сходящейся, если существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} P_n/Q_n = T\,. \qquad (2)$$

Число T называется значением цепной дроби (1) и пишут

$$T=b_0+\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Если предел в (2) не существует или существует, но $=\infty$, то цепная дробь (1) называется расходящейся (в первом случае существенно, во втором случае несущественно).

Числители и знаменатели подходящих дробей связаны рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}&P_n=b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2}\\&Q_n=b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}\\&n=1,2,\dots;\quad P_{-1}=1,\quad P_0=b_0,\quad Q_{-1}=0,\quad Q_0=1.\end{aligned}\qquad (3)$$

2. Пусть m и k - целые неотрицательные числа и функция $f(x)$ имеет в промежутке (a,b) непрерывные производные всех порядков до $m+k+1$ включительно. Имеет место формула Обрешкова с остаточным членом

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-\nu+1)}{(m+k)(m+k-1)\cdot\ldots\cdot(m+k-\nu+1)}\frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-\nu+1)}{(m+k)\cdot\ldots\cdot(m+k-\nu+1)}\frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)+R_{m,k}(f\,;x,x_0),\quad (4)$$

где

$$R_{m,k}(f\,;x,x_0)=\frac{1}{(m+k)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^m(x_0-t)^k f^{(m+k+1)}(t)\,dt,$$

которая широко применяется для выяснения общего вида подходящих дробей в теории цепных дробей.

Для $f(x)=e^x$, $x_0=0$ равенство (4) принимает вид

$$e^x\left(1+\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu}\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-\nu+1)}{(m+k)\cdot\ldots\cdot(m+k-\nu+1)}\frac{x^{\nu}}{\nu!}\right)=1+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-\nu+1)}{(m+k)\cdot\ldots\cdot(m+k-\nu+1)}\,\frac{x^{\nu}}{\nu\,!}+R_{m,k}\left(e^{t}\,;\,x\,,\,0\right), \qquad (5)$$

где остаточный член в этом случае, после замены переменной $t = xu$, принимает вид

$$R_{m,k}\left(e^{t}\,;\,x\,,\,0\right)=\frac{(-1)^{k}\,x^{m+k+1}}{(m+k)!}\int_{0}^{t}u^{k}(1-u)^{m}\,e^{xu}\,du\,. \qquad (6)$$

Так как

$$1+\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu}\,\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-\nu+1)}{(m+k)\cdot\ldots\cdot(m+k-\nu+1)}\,\frac{x^{\nu}}{\nu\,!}=\Phi(-k\,,-m-k\,,-x),$$

то равенство (5) можно переписать так

$$e^{x}\Phi(-k\,,-m-k\,,-x)=\Phi(-k\,,-m-k\,,-x)+R_{m,k}\left(e^{t}\,;\,x\,,\,0\right). \qquad (7)$$

Из (6) и (7) следует: если $\Pi_{m,k}\left(e^{t}\,,\,x\right)$ – дробь Паде поля $[m,\,k]$ для функции e^{x}, то

$$\Pi_{m,k}\left(e^{t}\,,\,x\right)=\frac{\Phi(-m\,,-m-k\,,-x)}{\Phi(-k\,,-m-k\,,-x)}\ [4].$$

3. Задача Коши

$$y'=y\,,\quad y(0)=1$$

имеет решение $y=e^{x}$.

Разложение функции $y=e^{x}$ в степенной ряд имеет вид

$$e^{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k\,!}\,,\ x\ \text{– любое.}$$

Разложение в цепную дробь

$$e^{x}=1+\frac{x}{1-x+}\quad\frac{x}{2-x+}\quad\frac{2x}{3-x+}\ldots\frac{nx}{+n+1-x}\text{, для любого } x\,.$$

Здесь, очевидно, имеем $b_0=1$, $b_k=k-x$, $k\ge 1$; $a_1(x)=1$, $a_{n+1}(x)=nx$ для $n\ge 1$.

И $Q_0=1$, $P_0=1$, $Q_1=1-x$, $P_1=x$,

$$\begin{cases}P_n=b_nP_{n-1}+a_nP_{n-2}\,,\\ Q_n=b_nQ_{n-1}+a_nQ_{n-2}\,.\end{cases}\ \text{для } n\ge 2.$$

Через функцию e^{x} выражаются гиперболические функции

$$sh\,x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\,,$$

$$ch\,x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,,$$

$$th\,x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,.$$

Известно, что

$$sh\,x=\frac{x(1+F)}{(1+F)^2-\frac{x^2}{4}},\quad ch\,x=1+\frac{\frac{x^2}{2}}{(1+F)^2-\frac{x^2}{4}},$$ где F определена формулой

$$F(x)=\underset{1}{\overset{\infty}{K}}\left(\frac{x^2/4}{2k+1}\right).$$

Известно ([6], с. 121), что при $-\infty<x<\infty$ имеет место разложение

$$th\,x=\frac{x}{1+}\;\frac{x^2}{3+}\;\frac{x^2}{5+}\ldots\frac{x^2}{+2n+1+}\ldots.$$

Дробь сходится на всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек несущественной расходимости.

Ниже приводится листинг программы на языке Turbo Pascal для нахождения значений $ch\,x$, $sh\,x$ и $th\,x$ с использованием подходящих дробей цепных дробей 10-го порядка для $x=0{,}1;0{,}2;\ldots;1{,}5$ и указано приближенное значение этих функций с точностью до 12 знака.

Листинг программы

```
uses crt;
const n=10;
var b,c:array [1..10] of real;
chcx,shcx,thcx,a,f:real; i:integer;
x:extended;
function sinh(x:extended):extended;
begin
sinh:=(exp(x)-1/exp(x))/2;
end;
function cosh(x:extended):extended;
begin
cosh:=(exp(x)+1/exp(x))/2;
end;
function tanh(x:extended):extended;
begin
tanh:=(exp(2*x)-1)/(exp(2*x)+1);
end;
begin
clrscr;
```

```
x:=0.1;
repeat
      a:=sqr(x)/4;
      b[n]:=2*n+1;
      c[n]:=b[n];
for i:=n-1 downto 1 do
begin
b[i]:=2*i+1;
c[i]:=b[i]+a/c[i+1];
     end;
f:=a/c[1];
chcx:=(sqr(1+f)+a)/(sqr(1+f)-a);
shcx:=x*(1+f)/(sqr(1+f)-a);
thcx:=x*(1+f)/(sqr(1+f)+a);
writeln('     x    |       cosh       |      chcx');
writeln('______________________________________________');
writeln('  ',x:4,'|',cosh(x),'|',chcx);
writeln('     x     |      sinh       |       shcx');
writeln('______________________________________________');
writeln('  ',x:4,'|',sinh(x),'|',shcx);
writeln('     x     |       tanh      |      thcx');
writeln('______________________________________________');
writeln('  ',x:4,'|',tanh(x),'|',thcx);
writeln;
writeln('   погрешность=',abs(tanh(x)-thcx));
x:=x+0.1;
until x>1.5;
readkey;
end.
```

Результаты программы (для x=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)

```
  x     |         cosh         |        chcx
_______________________________________________________________
1.0E-0001| 1.00500416805580E+0000| 1.00500416805517E+0000
  x     |         sinh         |        shcx
_______________________________________________________________
```

1.0E-0001| 1.00166750019844E-0001| 1.00166750019866E-0001

x | tanh | thcx

1.0E-0001| 9.96679946249558E-0002| 9.96679946249515E-0002

погрешность = 4.35568736027042E-0015

x | cosh | chcx

2.0E-0001| 1.02006675561908E+0000| 1.02006675561825E+0000

x | sinh | shcx

2.0E-0001| 2.01336002541094E-0001| 2.01336002540984E-0001

x | tanh | thcx

2.0E-0001| 1.97375320224904E-0001| 1.97375320224864E-0001

погрешность = 3.95196706306014E-0014

x | cosh | chcx

3.0E-0001| 1.04533851412886E+0000| 1.04533851412816E+0000

x | sinh | shcx

3.0E-0001| 3.04520293447143E-0001| 3.04520293447240E-0001

x | tanh | thcx

3.0E-0001| 2.91312612451591E-0001| 2.91312612451748E-0001

погрешность = 1.56648728277115E-0013

x | cosh | chcx

4.0E-0001| 1.08107237183845E+0000| 1.08107237183867E+0000

x | sinh | shcx

4.0E-0001| 4.10752325802816E-0001| 4.10752325802605E-0001

x | tanh | thcx

4.0E-0001| 3.79948962255225E-0001| 3.79948962255185E-0001

погрешность = 4.02884377335294E-0014

x | cosh | chcx

5.0E-0001| 1.12762596520638E+0000| 1.12762596520588E+0000

x | sinh | shcx

5.0E-0001| 5.21095305493747E-0001| 5.21095305493873E-0001

x | tanh | thcx

5.0E-0001| 4.62117157260010E-0001| 4.62117157259854E-0001

погрешность = 1.55619684890154E-0013

Из полученных значений для погрешностей видно, что данный способ интерполирования является более точным.

Список литературы

1. Джоунс У., Трон У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и положения.- М.: Мир, 1985.-414 с.

2. Дж. Бейкер мл., П. Грейве-Маррис, Аппроксимации Паде, 1.Основы теории, 2. Обобщения и приложения.- М.: Мир, 1986.-502 с.

3. Немнюгин С.А., Перколаб Л.В. Изучаем Turbo Pascal.- СПб.: Питер, 2003.- 320 с.

4. Рагимханова Г.С. Скорость сходимости некоторых цепных дробей и их приложения: дис…канд.физ.-мат.наук.- Санкт-Петербург. 2003.-78 с.

5. Хинчин А.Я. Цепные дроби.- М.: Наука, 1978.-112 с.

6. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.- М.: ГИИТТЛ, 1956.-203 с.

7. Яралиева Б.С. Использование цепных дробей для решений дифференциальных уравнений и оценки адекватности математических моделей динамических систем: дис…канд.техн.наук.-Махачкала.2013.-86 с.

8. Perron O., Die Lehze von den Kettenbruchen, Vol.1 (1954) Vol 2 (1957), Teubner, Leipzig.

Рецензенты:

Рамазанов А.-Р.К., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный университет», г. Махачкала;

Баламирзоев А.Г., д.т.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет», г. Махачкала.