

УДК 624.014

К РАСЧЕТУ РАМЫ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ СЕЧЕНИЯ В УРОВНЕ КАРНИЗНОГО УЗЛА

Вахтель Р.Р.¹, Исаев А.В.¹, Ефимов О.И.¹, Закиров Р.А.¹

¹ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», Казань, Россия (420043, Казань, ул. Зелёная, д. 1), e-mail: v_roman@bk.ru

Рамные конструкции получили широкое распространение в различных отраслях промышленного хозяйства в силу относительной простоты конструктивной формы, влияющей на скорость изготовления и монтажа, а также удобства организации технологических процессов. В статье рассмотрена рама, комбинирующая в достоинства решетчатых рам с позиции металлоемкости, а также рам сплошного сечения с позиции быстроты изготовления и возведения. Рама в наиболее напряженном карнизном узле имеет расщепление сечения, преобразуемое в подкосную систему. Благодаря такому решению изгибающий момент преобразуется в пару сил растяжения-сжатия, воспринимаемый отдельными расщепленными элементами рамы. При этом встает вопрос распределения изгибающих моментов и осевых сил по элементам рамы, поскольку указанное расщепление приводит к повышению степени внутренней статической неопределимости. Рассмотрен статический расчет рамы методом сил с использованием суперэлементного подхода. Установлены аналитические зависимости влияния геометрических параметров на распределение внутренних усилий в элементах рамы.

Ключевые слова: Рама сплошного сечения, ригель, статический расчет, конструктивная форма

ABOUT DESIGNING OF THE FRAME WITH SPLITTING OF CROSS-SECTION IN THE EAVES NODE

Vakhtel R.R.¹, Isaev A.V.¹, Efimov O.I.¹, Zakirov R.A.¹

¹"Kazan State Architectural and Construction University", Kazan, Russia (420043, Kazan, Zelyonaya St., 1), e-mail: v_roman@bk.ru

Frame structures are commonly used in the different industries of economy, mostly, own to their relatively practical structural shape which also quickens a manufacture and erection speed and provides convenient conditions at the construction site. The paper describes a new constructive shape of a steel two-pin frame which combines advantages of a light-weight of the lattice two-pin frames, with advantages of a speed manufacturing of the solid section frames. This new two-pin frame in the cornice area has a splitted cross section which the brace structure of joint is formed with. Regarding of this splitting of cross-section flexural stresses are transformed in an axial compressive and tensile forces which splitted members of cross-section are carrying. Nevertheless, there are some difficulties in defying exact forces and moment distribution between members of the frame due to increasing of the static indeterminacy of the system caused by cross-section splitting. Static structural calculations of this frame with using a superelement method were held. Analytical dependences between geometric parameters and effect of actions in the members of frame were obtained.

Keywords: Solid cross-section frames, girder, static structural calculations, constructive shape

Рамные конструкции получили широкое распространение в различных отраслях промышленного хозяйства в силу относительной простоты конструктивной формы, влияющей на скорость изготовления и монтажа, а также удобства организации технологических процессов [5].

В зависимости от геометрических параметров (пролет, высота, угол наклона ригеля), а также интенсивности нагружений различают рамы сплошного сечения и решетчатого сечения постоянного и переменного очертания.

При этом расчетным сечением в рассматриваемых рамах является сечение карнизного узла с максимальным изгибающим моментом [1]. В указанном карнизном узле применение сплошного сечения приводит к необоснованному перерасходу материала, а применение

решетчатого сечения в наиболее напряженном узле достаточно сложно с позиции трудоемкости изготовления и монтажа.

Наиболее рационально применение в указанном узле упрощенного сквозного сечения рамы, включающей стойки, ригели постоянного по длине сечения, и подкосы карнизной части. При этом каждый подкос образован путем продольной резки профилей стыкуемых концов стойки и ригеля с последующим отгибом их нижних частей и соединенных между собой, например, на болтах [2] (рис. 1).

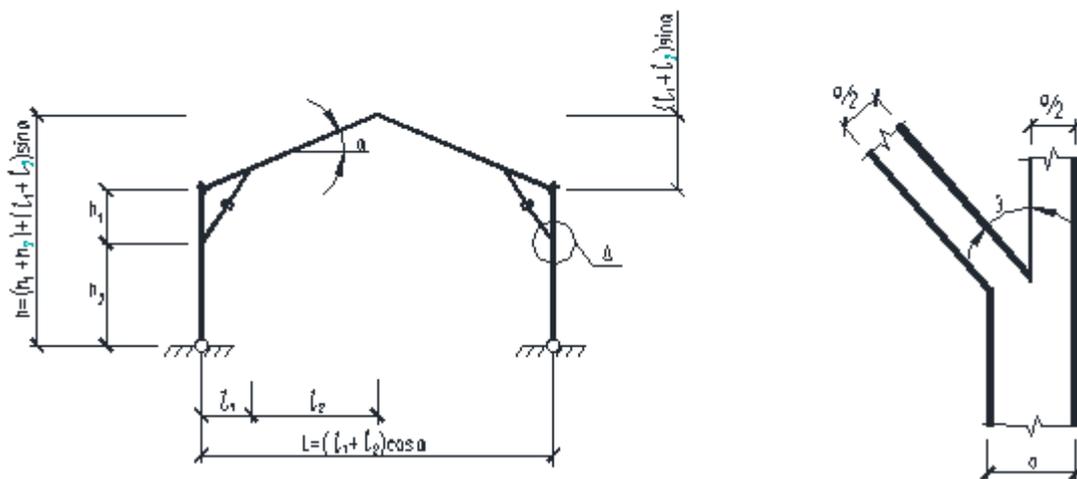


Рис. 1. Геометрическая схема рамы и узла

Постановка задачи

Рассматриваемая рама изготовлена из одностипного профиля. При этом в наиболее напряженном (карнизном) узле имеет развитое поперечное сечение, что позволяет воспринимать большие усилия. По статической схеме рама является статически неопределимой как внешне, так и внутренне, и для изучения работы рамы необходимо получить аналитические зависимости распределения внутренних усилий в ее элементах.

Решение задачи

Для решения задачи использован суперэлементный подход с реализацией метода сил [3, 4], поскольку рама регулярна и осесимметрична, имея в своем составе замкнутый контур. При этом рама разбита на подконструкции в виде треугольного замкнутого суперэлемента (рис. 2) и элемент стойки и ригеля.

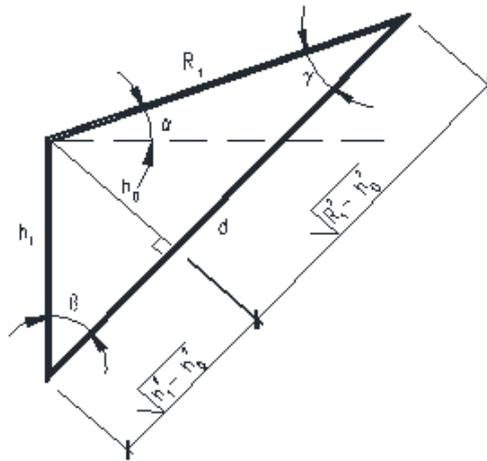


Рис. 2. Геометрическая схема “суперэлемента”

Канонические уравнения для “суперэлемента” записаны методом сил, используя предпосылки упругого линейного расчета, геометрических условий при $h_1 \leq R_1$; $\beta \geq \gamma$ и следующего правила знаков:

- а) Осевая сила “+N” – растяжение; “-N” – сжатие;
- б) Перерезывающая сила “+Q” – если отсеченная часть вращается по часовой стрелке, либо ось вращения до совмещения с эпюрой “M” по часовой стрелке.
- в) Изгибающие моменты: “-M” – для левой части против часовой стрелки; “+M” – для правой по часовой стрелке.

Геометрические соотношения для “суперэлемента” записаны в виде:

$$\frac{d}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{h_1}{\sin\gamma} = \frac{\ell_1}{\sin\beta}; h_0 = \ell_1 \sin\gamma; \sin\gamma = \frac{h_1}{\ell_1} \sin\beta; \sin\beta = \frac{\frac{\ell_1}{d}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\ell_1}{d} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha);$$

$$\sin\gamma = \frac{h_1 \ell_1}{\ell_1 d} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha); h_0 = \frac{h_1 \ell_1}{d} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha), \text{ то есть } h_0 = \frac{h_1 \ell_1}{d} \cos\alpha;$$

$$d^2 = (h_1 + \ell_1 \sin\alpha)^2 + (\ell_1 \cos\alpha)^2 = h_1^2 + 2h_1 \ell_1 \sin\alpha + \ell_1^2 \sin^2\alpha + \ell_1^2 \cos^2\alpha =$$

$$= h_1^2 + \ell_1^2 + 2h_1 \ell_1 \sin\alpha \text{ или } h_0 = \frac{h_1 \ell_1 \cos\alpha}{\sqrt{h_1^2 + \ell_1^2 + 2h_1 \ell_1 \sin\alpha}}.$$

Определение характера распределения эпюры моментов внутри “суперэлемента” выполнено за счет введения “фиктивных” консолей с приложением к ним единичной усилий $\bar{Q} = 1$; $\bar{N} = 1$ (рис. 3).

В частности, для сдвигающего усилия $\bar{Q} = 1$ из условия равенства нулю суммы площадей эпюры моментов, определено расстояние “с”, характеризующего положение консоли по длине подкоса (рис. 3).

Исходя из соотношения площадей:

$$1. (+M_{\bar{Q}}) \frac{(d-c)^2 \times 1}{2} + \frac{(d-c)^2 \times 1}{\cos\gamma \times 2} = \frac{(d-c)^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos\gamma}\right)$$

$$2. (-M_{\bar{Q}}) \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2\cos\beta} - \frac{(c-\sqrt{h_1^2-h_0^2})^2}{2\cos\beta} + \frac{(c-\sqrt{h_1^2-h_0^2})^2}{2\cos\gamma} = \frac{c^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) - \frac{(c-\sqrt{h_1^2-h_0^2})^2}{2} \left(\frac{1}{\cos\beta} - \frac{1}{\cos\gamma}\right)$$

и геометрических параметров элемента:

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{h_1^2-h_0^2}}{h_1}, \quad \cos\gamma = \frac{d-\sqrt{h_1^2-h_0^2}}{\ell_1}$$

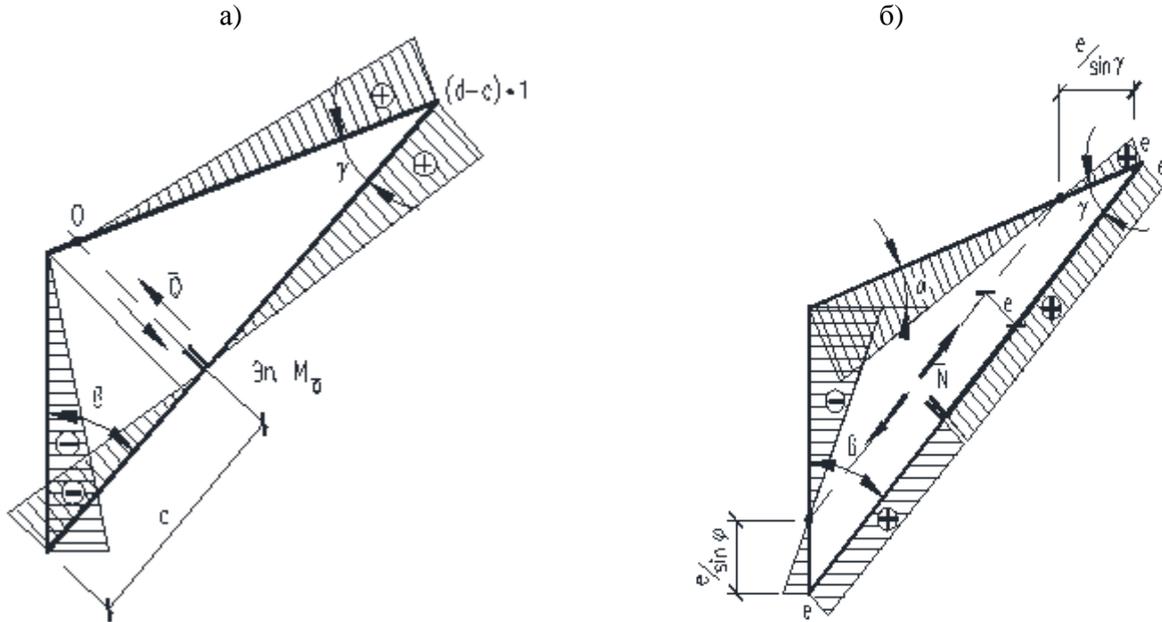


Рис. 3 Схема распределения изгибающих моментов в “суперэлементе” от единичных усилий.

$$\bar{Q} = 1 \text{ (a) и } \bar{N} = 1.$$

получено:

$$c = \frac{(h_1^2 - h_0^2) \left(\frac{\ell_1}{d - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}} - \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - h_0^2}} \right) - d^2 - \frac{d^2 \ell_1}{d - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}}}{2 \left[\left(\sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right) \left(\frac{\ell_1}{d - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}} - \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - h_0^2}} \right) - d \left(1 + \frac{\ell_1}{d - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}} \right) \right]}$$

Аналогично для $\bar{N} = 1$ (рис. 3б):

$$1. (+M_{\bar{N}}) d \times e + \frac{e}{\sin\gamma} \times \frac{e}{2} + \frac{e}{\sin\beta} \times \frac{e}{2} = d \times e + \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\beta} \right)$$

$$2. (-M_{\bar{N}}) \frac{h_0-e}{\sin\gamma} \times \frac{h_0-e}{2} + \frac{h_0-e}{\sin\beta} \times \frac{h_0-e}{2} = \frac{(h_0-e)^2}{2} \left(\frac{1}{\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\beta} \right)$$

$$\sin\beta = \frac{h_0}{h_1}; \quad \sin\gamma = \frac{h_0}{\ell_1}$$

Эксцентриситет приложения усилия $\bar{N} = 1$:

$$e = - \left[\frac{(d + \ell_1 + h_1)h_0}{h_0 - \ell_1 - h_1} \right] - \sqrt{\frac{h_0^2(d + \ell_1 + h_1)^2}{(h_0 - \ell_1 - h_1)^2} + \frac{h_0^2(\ell_1 + h_1)}{h_0 - \ell_1 - h_1}}$$

Каноническое уравнение метода сил для контура без консолей можно записать в виде:

$$\begin{cases} \delta_{11} \times N + \delta_{12} \times M + \delta_{13} \times Q + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \times N + \delta_{22} \times M + \delta_{23} \times Q + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31} \times N + \delta_{32} \times M + \delta_{33} \times Q + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

При наличии консолей:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

тогда:

$$\begin{cases} \delta_{11} \times N + \delta_{13} \times Q + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{22} \times M + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31} \times N + \delta_{33} \times Q + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} \delta_{11} \times N + \delta_{13} \times Q + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{31} \times N + \delta_{33} \times Q + \Delta_{3p} = 0 \\ \delta_{22} \times M + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

По правилу Крамера для первых двух уравнений:

$$(1) N = - \frac{\Delta_{1p}\delta_{33} - \Delta_{3p}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}$$

Для третьего:

$$(2) M = - \frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}$$

$$(3) Q = - \frac{\Delta_{3p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{31}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}$$

Определение перемещений для замкнутого контура в месте рассечения (пренебрегая перемещениями от усилий Q) – первое неизвестное (рис. 4)

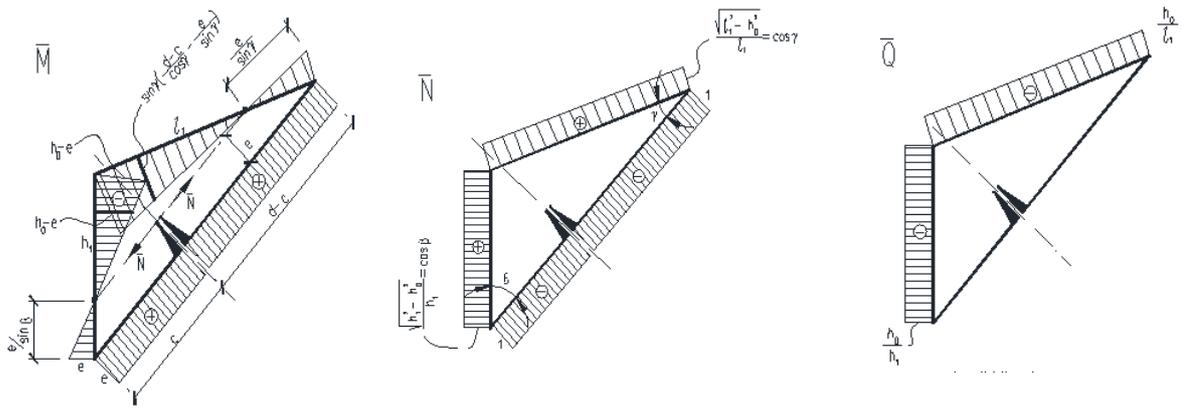


Рис. 4. К определению перемещений от единичных усилий

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ_T} d\ell + \sum \int \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1}{EA_T} d\ell \\
 &= \frac{c \times e^2}{EJ_T} + \frac{(d - c) \times e^2}{EJ_T} + \frac{e^3}{\sin\beta} \times \frac{1}{3EJ_T} + \frac{e^3}{\sin\beta \times 3EJ_T} + \left(h_1 - \frac{e}{\sin\beta} \right) \\
 &\quad \times \frac{(h_0 - e)^2}{3EJ_T} + \left(\ell_1 - \frac{e}{\sin\gamma} \right) \times \frac{(h_0 - e)^2}{3EJ_T} + \frac{d}{EA_T} + \frac{\sqrt{\ell_1^2 - h_0^2}}{\ell_1 EA_T} + \frac{\sqrt{h_1^2 - h_0^2}}{\ell_1 EA_T} \\
 &= \frac{d \times e^2}{EJ_T} + \frac{e^3}{3EJ_T} \times \left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \right) + \frac{(h_0 - e)^2}{3EJ_T} \times \left(h_1 + \ell_1 - e \left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \right) \right) \\
 &\quad + \frac{d}{EA_T} + \frac{1}{EA_T} \times \left(h_1 + \ell_1 - \frac{h_0^2}{\ell_1} - \frac{h_0^2}{h_1} \right)
 \end{aligned}$$

- второе неизвестное (рис. 5)

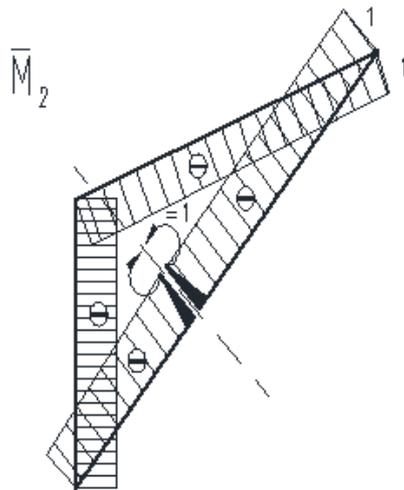


Рис. 5. К определению перемещений от единичной нагрузки

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \times \bar{M}_1}{EJ_i} = \frac{d + l_1 + h_1}{EJ_T}$$

- третье неизвестное (рис. 6)

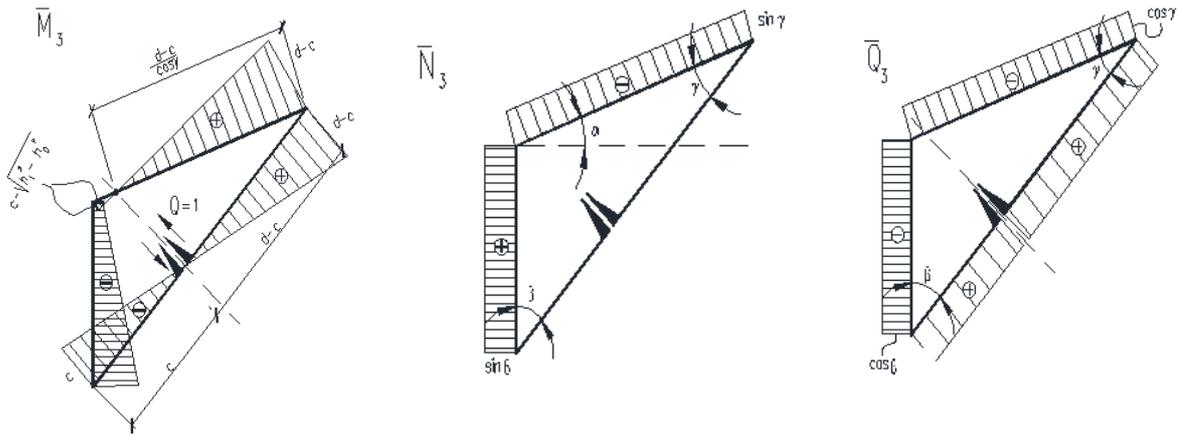


Рис. 6. К определению перемещений от единичной нагрузки

$$\begin{aligned}
 \delta_{33} &= \sum \int \frac{\bar{M}_3 \bar{M}_3}{EJ_T} d\ell + \sum \int \frac{\bar{N}_3 \bar{N}_3}{EA_T} d\ell \\
 &= \frac{\sin^2 \beta \times h_1}{EA_T} + \frac{\sin^2 \gamma \times \ell_1}{EA_T} + \frac{(d-c)^3}{3EJ_T} + \frac{(d-c)^3}{\cos \gamma \times 3EJ_T} + \frac{c^3}{3EJ_T} \\
 &\quad + \frac{(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2})^2 \times (\ell_1 - \frac{d-c}{\cos \gamma})}{3EJ_T} + \frac{h_1}{6EJ_T} \\
 &\quad \times \left(c^2 + 4 \left(\frac{2c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}}{2} \right)^2 + \left(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{EA_T} \times (h_1 \sin^2 \beta + \ell_1 \sin^2 \gamma) + \frac{(d-c)^3}{3EJ_T} \left(1 + \frac{1}{\cos \gamma} \right) + \frac{c^3}{3EJ_T} \\
 &\quad + \frac{(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2})^2 \times (\ell_1 - \frac{d-c}{\cos \gamma})}{3EJ_T} + \frac{h_1}{6EJ_T} \\
 &\quad \times \left(c^2 + 4 \left(\frac{2c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}}{2} \right)^2 + \left(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{13} = \delta_{31} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EJ_T} d\ell + \sum \int \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_3}{EA_T} d\ell \\
&= \frac{(d-c)^2}{2EJ_T} e - \frac{c^2}{2EJ_T} e + \frac{1}{EJ_T} \\
&\times \left\{ \left[\cos\gamma \times \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right) + d-c \right] \times \frac{1}{2} \times \frac{e}{2\sin\gamma} \times 4 + \frac{e}{\sin\gamma} \times (d-c) \right\} \times \frac{e}{6\sin\gamma} \\
&- \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right) \frac{1}{6EJ_T} + \frac{h_1}{6EJ_T} \left[4 \frac{\cos\gamma}{2} \times \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right) \times \frac{\sin\gamma}{2} \times \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right) \right] \\
&+ \frac{\ell_1 - \frac{d-c}{\cos\gamma}}{6EJ_T} \left\{ (c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}) \times (h_0 - e) + 4 \left[(h_0 - e) + \sin\gamma \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right) \right] \times \frac{1}{2} \right. \\
&\times \left. \left(\frac{c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}}{2} \right) \right\} - \frac{e}{6\sin\beta EJ_T} \left\{ e \times c + 4 \frac{e}{2} \times \left(c - \frac{e}{\sin\beta} \cos\beta + c \right) \frac{1}{2} \right\} \\
&+ \frac{(h_1 - \frac{e}{\sin\beta})}{6EJ_T} \left\{ 4 \left[\left(c - \frac{e}{\sin\beta} \cos\beta \right) + (c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2}) \right] \frac{1}{2} \times \frac{(h_0 - e)}{2} + (c \right. \\
&- \sqrt{h_1^2 - h_0^2})(h_0 - e) \left. \right\} + \frac{h_1 \sin\beta}{EA_T} \times \frac{\sqrt{h_1^2 - h_0^2}}{h_1} - \frac{\ell_1 \sin\gamma}{EA_T} \times \frac{\sqrt{\ell_1^2 - h_0^2}}{\ell_1} \\
&= \frac{(d^2 - 2dc)e}{2EJ_T} + \frac{e^2}{6\sin\gamma EJ_T} \left\{ \left[2(d-c) - \frac{e}{\text{tg}\gamma} \right] \frac{1}{\sin\gamma} + \frac{d-c}{\sin\gamma} \right\} - \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right)^3 \\
&\times \frac{1}{6EJ_T} \{ \cos\gamma \times \sin\gamma \} \\
&+ \frac{\ell_1 - \frac{d-c}{\cos\gamma}}{6EJ_T} \left\{ \left(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right) (h_0 - e) \right. \\
&+ [h_0 - 2e + (d-c)\text{tg}\gamma] \left(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right) \left. \right\} - \frac{e^2}{6\sin\beta EJ_T} \left\{ 3c - \frac{e}{\text{tg}\beta} \right\} \\
&+ \frac{(h_1 - \frac{e}{\sin\beta})(h_0 - e)}{6EJ_T} \left\{ 3c - \frac{e}{\text{tg}\beta} - 2\sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right\} + \frac{\sin\beta}{EA_T} \sqrt{h_1^2 - h_0^2} \\
&- \frac{\sin\gamma}{EA_T} \sqrt{\ell_1^2 - h_0^2} \\
&= \frac{(d^2 - 2dc)e}{2EJ_T} + \frac{e^2}{6\sin^2\gamma EJ_T} \left\{ 3(d-c) - \frac{e}{\text{tg}\gamma} \right\} - \left(\frac{d-c}{\cos\gamma} - \frac{e}{\sin\gamma} \right)^3 \frac{1}{6EJ_T} \left\{ \frac{\sin 2\gamma}{2} \right\} \\
&+ \left(\ell_1 - \frac{d-c}{\cos\gamma} \right) \left(c - \sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right) \frac{1}{6EJ_T} \{ 2h_0 - 3e + (d-c)\text{tg}\gamma \} \\
&- \frac{e^2}{6\sin\beta EJ_T} \left\{ 3c - \frac{e}{\text{tg}\beta} \right\} + \left(h_1 - \frac{e}{\sin\beta} \right) (h_0 - e) \frac{1}{6EJ_T} \left\{ 3c - \frac{e}{\text{tg}\beta} - 2\sqrt{h_1^2 - h_0^2} \right\} \\
&+ \frac{h_1 \text{tg}\beta}{EA_T} - \frac{\sin\gamma \sqrt{\ell_1^2 - h_0^2}}{EA_T}
\end{aligned}$$

В качестве внешнего воздействия на основную систему рассмотрено нагружение рамы (включая “суперэлемент”) равномерно-распределенной нагрузкой “q” (рис. 7) при условии полученного решения на границах контура.

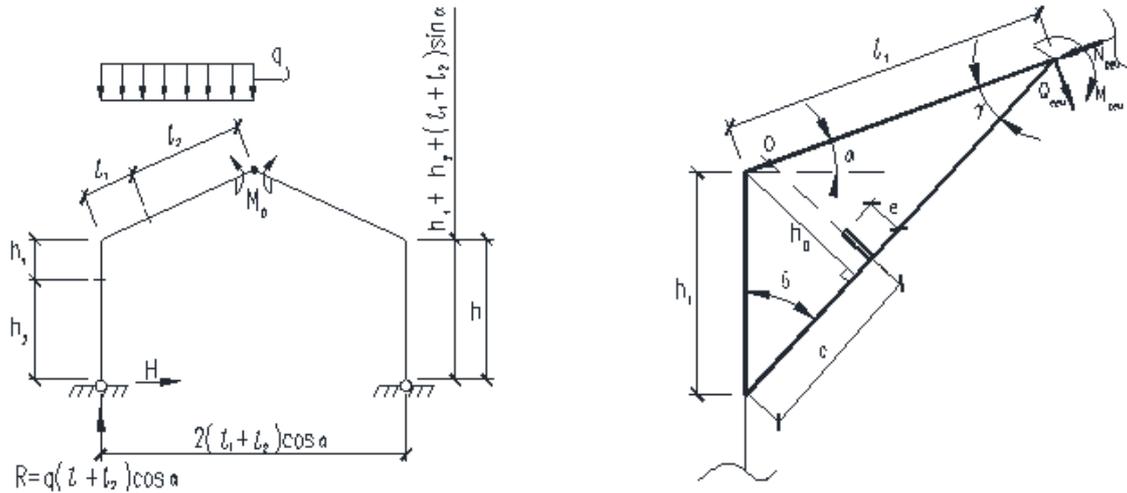


Рис. 7. Вариант нагружения основной системы равномерно-распределенной нагрузкой
Исходя из условия равновесия:

$$\sum M_{F_0} = -R(l_1 + l_2)\cos\alpha + hH + \frac{q[(l_1 + l_2)\cos\alpha]^2}{2} = 0$$

получим распор рамы (рис. 8):

$$H = \frac{R(l_1 + l_2)\cos\alpha - \frac{q[(l_1 + l_2)\cos\alpha]^2}{2}}{h} = \frac{q[(l_1 + l_2)\cos\alpha]^2 - \frac{q[(l_1 + l_2)\cos\alpha]^2}{2}}{h} = \frac{q[(l_1 + l_2)\cos\alpha]^2}{2h}$$

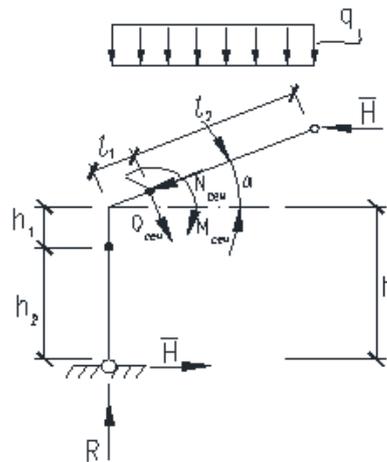


Рис. 8. Расчетная основная схема для определения внутренних усилий от равномерно-распределенной нагрузки

Эпюры внутренних усилий в “суперэлементе” при действии внешней нагрузки, приведены на рис. 9

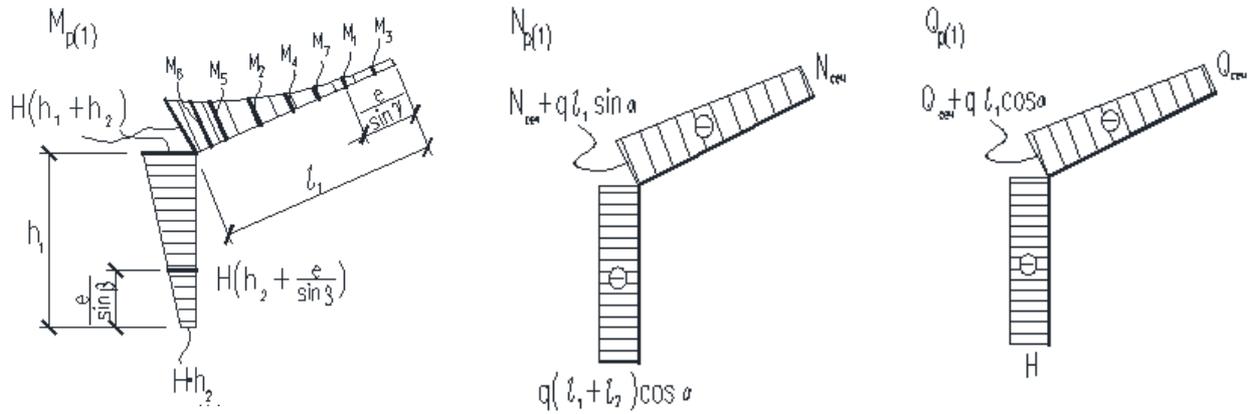


Рис. 9. Эпюры внутренних усилий в “суперэлементе” при действии нагрузки “q”

$$M_1 = M_{\text{сеч}} + Q_{\text{сеч}} \frac{e}{\sin \gamma} + q \frac{\left(\frac{e}{\sin \gamma}\right)^2}{2}$$

$$= -H l_2 \sin \alpha + q \frac{(\ell_2 \cos \alpha)^2}{2} - H \sin \alpha \frac{e}{\sin \gamma} + q \ell_2 \cos^2 \alpha \frac{e}{\sin \gamma} + q \frac{\left(\left(\frac{e}{\sin \gamma}\right) \cos \alpha\right)^2}{2}$$

$$M_2 = -H l_2 \sin \alpha + q \frac{(\ell_2 \cos \alpha)^2}{2} - H \sin \alpha \left(\frac{\ell_1 + \frac{e}{\sin \gamma}}{2}\right) + q \ell_2 \cos^2 \alpha \frac{\ell_1 + \frac{e}{\sin \gamma}}{2} + q \frac{\left(\left(\ell_1 + \frac{e}{\sin \gamma}\right) \cos \alpha\right)^2}{8}$$

$$M_3 = -H l_2 \sin \alpha + q \frac{(\ell_2 \cos \alpha)^2}{2} - H \sin \alpha \left(\frac{e}{2 \sin \gamma}\right) + q \ell_2 \cos^2 \alpha \frac{e}{2 \sin \gamma} + q \frac{\left(\left(\frac{e}{\sin \gamma}\right) \cos \alpha\right)^2}{8}$$

$$M_4 = -H l_2 \sin \alpha + q \frac{(\ell_2 \cos \alpha)^2}{2} - H \sin \alpha \left(\frac{\ell_1}{2}\right) + q \ell_2 \cos^2 \alpha \frac{\ell_1}{2} + q \frac{(\ell_1 \cos \alpha)^2}{8}$$

$$M_6 = -H l_2 \sin \alpha + q \frac{(\ell_2 \cos \alpha)^2}{2} - H \sin \alpha \left(\frac{\ell_1}{2} + \frac{d-c}{2 \cos \gamma}\right) + q \ell_2 \cos^2 \alpha \left(\frac{\ell_1}{2} + \frac{d-c}{2 \cos \gamma}\right) + q \frac{\left(\left(\ell_1 + \frac{d-c}{\cos \gamma}\right) \cos \alpha\right)^2}{8}$$

$$M_7 = -H l_2 \sin \alpha + q \frac{(\ell_2 \cos \alpha)^2}{2} - H \sin \alpha \left(\frac{d-c}{2 \cos \gamma}\right) + q \ell_2 \cos^2 \alpha \left(\frac{d-c}{2 \cos \gamma}\right) + q \frac{\left(\cos \alpha \frac{d-c}{\cos \gamma}\right)^2}{8}$$

В случае загрузки основной системы (ОС) единичной нагрузкой (распор Рис. 10) получим решение в следующем виде:

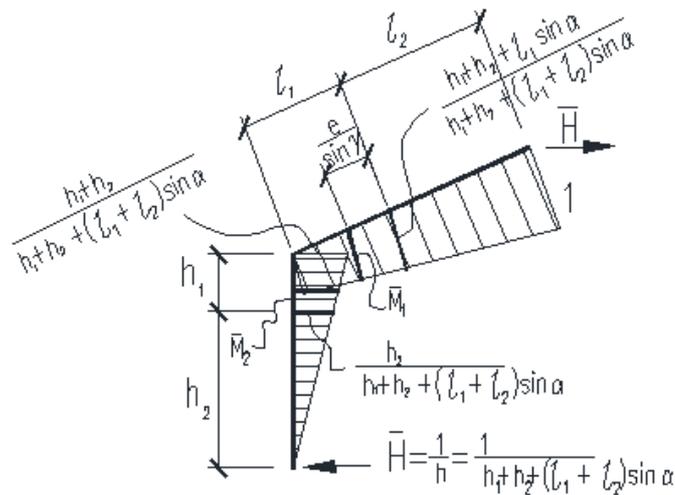


Рис. 10. Загружение ОС единичной нагрузкой распора

Таким образом:

Решение для «супер элемента» по 1 случаю (загружение основной общей системой внешней нагрузкой).

Внутренние усилия в месте рассечения:

$$(1) N_p = -\frac{\Delta_{1p}\delta_{33} - \Delta_{3p}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}$$

$$(2) M_p = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}$$

$$(3) Q_p = -\frac{\Delta_{3p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{31}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}$$

Решение для «супер элемента» по 2 случаю (загружение общей основной системы единичной нагрузкой):

$$(1) \bar{N}_p = -\frac{\bar{\Delta}_{1p}\delta_{33} - \bar{\Delta}_{3p}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}$$

$$(2) \bar{M}_p = -\frac{\bar{\Delta}_{2p}}{\delta_{22}}$$

$$(3) \bar{Q}_p = -\frac{\bar{\Delta}_{3p}\delta_{11} - \bar{\Delta}_{1p}\delta_{31}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}$$

$$\begin{cases} M_{ок} = M_{p(1)} + \bar{M}_1 N_p + \bar{M}_2 M_p + \bar{M}_3 Q_p \\ N_{ок} = N_{p(1)} + \bar{N}_1 N_p + \bar{N}_3 Q_p \\ Q_{ок} = Q_{p(1)} + \bar{Q}_1 Q_p + \bar{Q}_3 Q_p \end{cases}$$

Окончательные эпюры для «супер элемента» по второму случаю

$$\begin{cases} \bar{M}_{ок} = \bar{M}_{p(2)} + \bar{M}_1 \bar{N}_p + \bar{M}_2 \bar{M}_p + \bar{M}_3 \bar{Q}_p \\ \bar{N}_{ок} = \bar{N}_{p(2)} + \bar{N}_1 \bar{N}_p + \bar{N}_3 \bar{N}_p \\ \bar{Q}_{ок} = \bar{Q}_{p(2)} + \bar{Q}_1 \bar{Q}_p + \bar{Q}_3 \bar{Q}_p \end{cases}$$

Для общей основной системы, учитывая рассмотренные варианты загрузений, записано каноническое уравнение в виде:

$$d_{11} M_0 + D_{1p} = 0, \text{ где } M_0 = -\frac{D_{1p}}{d_{11}}$$

d_{11} – взаимный поворот в "шарнире" при действии на основную общую систему $M_0 = 1$

D_{1p} – взаимный поворот в "шарнире" при действии на основную общую систему внешней нагрузки.

Определение неизвестных выполнено методом сил, пренебрегая компонентами перерезывающих усилий (в силу малости и упрощения задачи), при учете распределения внутренних усилий в «суперэлементе» от действия единичной силы (единичное состояние по рис. 10) и внешней нагрузки на ригель рамы (грузовое состояние по рис. 9).

$$d_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_i}{EJ_i} d\ell + \sum \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_i}{EA} d\ell, D_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_{pi}}{EJ_i} d\ell + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_{pi}}{EA} d\ell.$$

Характер эпюр распределения моментов, полученных на основе решения, в общей основной системе, приведены на рис. 11.

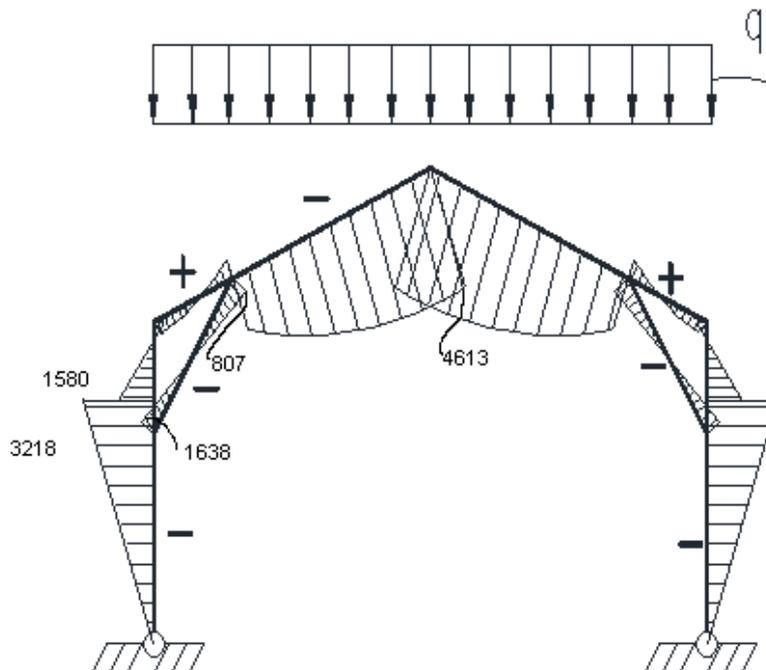


Рис. 11. Эпюры распределения моментов

Рассмотрим пример определения внутренних усилий в раме при действии равномерно-распределенной нагрузки $q=2000\text{кг/м}$, соответствующей сочетанию нагрузок от собственного веса ($g=600\text{кг/м}$) и снеговой ($g=1400\text{кг/м}$). Геометрические параметры рамы: $L=6\text{м}$, $l_1=1.2\text{м}$, $h_1=1\text{м}$, $h_0=0.71\text{м}$, $d=1.71\text{м}$, $\alpha=15^\circ$.

Положение консоли, определяемое по уравнению равновесия внутренних эпюр моментов от фиктивной перерезывающей силы: $c=0.834\text{м}$, а величина консоли $e=-0.212\text{м}$. Распределение внутренних усилий в «суперэлементе» приведено на рис. 6, где значения неизвестных от единичных усилий составляют: $\delta_{11}=8,8 \cdot 10^4$, $\delta_{22}=1,5 \cdot 10^6$, при усилении распора от внешней нагрузки $H=2016\text{кг}$.

Значения изгибающих моментов на участке l_1 (по длине «суперэлемента») от «грузового состояния» (рис. 9):

$$M_1=3024\text{кгм}, M_2=3152\text{кгм}, M_3=2613\text{кгм}, M_4=3339\text{кгм}, M_6=3890\text{кгм}, M_7=2611\text{кгм}.$$

При этом в уровне карниза момент: $M_{p(1)} = H(h_1 + h_2) = 2016(3 + 1) = 8064\text{кгм}$, а значения усилий на границах «суперэлемента» (рис. 8) составляют:

$$N_{\text{сеч}} = H \cos \alpha + q l_2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2842.8\text{кг},$$

$$Q_{\text{сеч}} = -H \sin \alpha + q l_2 \cos^2 \alpha = 2820\text{кг},$$

$$M_{\text{сеч}} = -H l_2 \sin \alpha + 0.5 q (l_2 \cos \alpha)^2 = 2058.3\text{кгм},$$

Характер распределения моментов от единичного распора, приведен на рис. 10, где значения моментов в карнизном узле от «единичного состояния»:

$$\overline{M}_{(1)} = \frac{(h_1+h_2)}{h_1+h_2+(l_1+l_2)\sin\alpha} = 0.837\text{кгм},$$

а значения усилий на границах «суперэлемента» (рис. 10) составляют:

$$\overline{M}_{(1Н)} = \frac{h_2}{h_1+h_2+(l_1+l_2)\sin\alpha} = 0.21\text{кгм}, \quad \overline{M}_{(1В)} = \frac{h_1+h_2+l_1\sin\alpha}{h_1+h_2+(l_1+l_2)\sin\alpha} = 0.903\text{кгм},$$

Окончательный результат, получаемый перемножением эпюр «единичного» и «грузового» состояния, приведен на рис. 11.

Рассматривая аналогичную расчетную схему, реализованную в виде конечно-элементной стержневой системы в ВК «ЛИРА», получено качественное и количественное совпадение эпюр внутренних усилий (рис. 12) с точностью 3-20%, что объясняется упрощением точного решения.

При этом точное решение, не смотря на трудоемкость математического аппарата, позволяет установить аналитические зависимости, такие как влияние геометрических параметров на весовые показатели рамы.

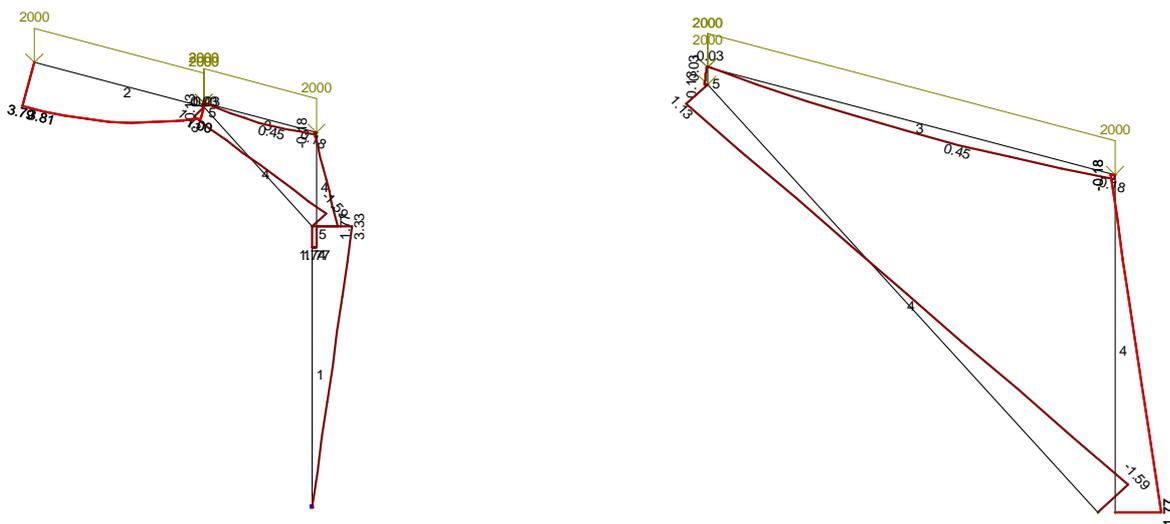


Рис. 12. Характер и значения изгибающих моментов (тн·м) для рамы

Список литературы

1. Вахтель Р.Р., Исаев А.В. Определение оптимальных параметров стальных рам. Эффективные строительные конструкции: Теория и практика. – 2013. – Пенза. – XIII Международная научно-практическая конференция. – С. 22-25.
2. Патент РФ № 204111210/03, 05.04.2004. Кузнецов И.Л., Вахтель Р.Р. Стальная рама // Патент России №2263190.
3. Строительная механика. Изд.7-е, перераб. и доп. С86 Под ред. А.В. Даркова. Учебник для вузов. – М., «Высш. школа», 1976.
4. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический в 2-х кн. Кн.1 под ред. А.А. Уманского. Изд. 2-у перераб. – М., Стройиздат, 1972. – 600 с.
5. Каркасы зданий из легких металлических конструкций и их элементы: Учебное пособие/ Л.В. Енджиевский, В.Д. Наделев, И.Я. Петухова. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 247 с. с илл.

Рецензенты:

Кузнецов И.Л., д.т.н, профессор, заведующий кафедрой «Металлических конструкций и испытаний сооружений» ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», г. Казань.

Каюмов Р.А., д.ф.м.н., профессор, профессор кафедры «Механики» ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», г. Казань.