УДК 517.91: 518.1

# КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

**Катрич С.А.**[1]

[1]*Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВПО «Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)», Таганрог, Россия (347924, Таганрог, ул. Инициативная, 48), e-mail: Katrich_Sergey@mail.ru*

**Подход к компьютерному анализу устойчивости решений задачи Коши для систем ОДУ в нормальной форме строится на основе рекуррентных преобразований разностных схем, преимущественно используется метод Эйлера-Коши. Условия устойчивости даны в форме оценок асимптотического поведения сходящихся бесконечных произведений. На практике выполняется аппроксимация бесконечных произведений частичными, которые циклически реализуются программно с целью компьютерной проверкиустойчивости. Характер поведения частичных произведений обусловливает критерии компьютерного анализа: их ограниченность соответствует устойчивости, неограниченный рост – неустойчивости, стремление к нулю с ростом независимой переменной – асимптотической устойчивости. При компьютерной реализации анализа в качестве разностных схем помимо метода Эйлера-Коши используются методы Рунге-Кутта и Адамса четвертого порядка. Предложенный подход и данные условия устойчивости применяются для компьютерной оценки устойчивости решений систем ОДУ общего вида. Приводятся результаты численных экспериментов и компьютерного моделирования, даны их аналитические интерпретации.**

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, устойчивость, асимптотическая устойчивость, разностные методы, бесконечные произведения, компьютерный анализ устойчивости, численные эксперименты.

# COMPUTER STABILITY ANALYSIS OF SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE BASIS OF RECURRENT CONVERSION OF DIFFERENCE SCHEMES

**Katrich S.A.**[1]

[1]*Taganrog Institute of A.P. Chekhov (a branch) FSBEE HVT «RostovStateEconomicUniversity (RINC)», Taganrog, Russia (347924, 48, Initsiativnaya Street), e-mail: Katrich_Sergey@mail.ru*

**The approach to computer analysis of solution stability of Cauchy problem for systems of ODE in normal form is based on the recurrence of difference schemes mainly the method of Euler-Cauchy. The stability conditions are given in the form of estimates of the asymptotic behavior of convergent infinite products. In practice, the approximation of infinite products is performed by partial ones that cyclically are implemented in software with the aim of checking computer stability. The behavior of the partial products determines criteria of computer analysis: their limitations corresponds to stability, unlimited growth – instability, aspiration for zero with the increase of the independent variable – asymptotic stability. When computer realizes analysis as the method of finite difference schemes in addition to the Euler-Cauchy, methods of fourth order of Runge-Kutta and Adams are used. The proposed approach and data stability conditions apply for computer evaluation of stability solutions of ODE systems of general form. The results of numerical experiments and computer modeling and their analytical interpretation are given.**

Keywords: ordinary differential equations, Cauchy problem, stability, asymptotic stability, difference methods, infinite products, computer analysis of stability, numerical experiments.

## Постановка задачи

Традиционно анализ устойчивости по Ляпунову – предмет качественной теории дифференциальных уравнений. Теоретические методы сложны, трудоемки и, как правило, не допускают компьютерной реализации. В работе предлагается подход к компьютерному анализу устойчивости на основе разностной схемы Эйлера-Коши решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в нормальной форме, который сводит вопрос об устойчивости к исследованию асимптотического поведения бесконечных произведений, построенных на основеметода Эйлера-Коши. С целью компьютерной реализации анализа устойчивости выполняется циклическое накопление частичных произведений, значения которых при фиксированном шаге разностной схемы пробегают достаточно большой промежуток на полуоси. При данном подходе компьютерный анализ устойчивости сводится к заданию правых частей систем ОДУ и вычислению частичных произведений, попутно получается приближенное решениесистемы.

**Описание общей схемы компьютерного анализа устойчивости**

Пусть требуется исследовать устойчивость в смысле Ляпунова решения задачи Коши для нелинейной системы ОДУ в нормальной форме

$$\frac{dY}{dt}=F(t,Y),\ Y(t_0)=Y_0, \tag{1}$$

где $Y=Y(t)$, $Y=\left(y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)\right)$ – искомое решение, $Y_0=\left(y_1(t_0),y_2(t_0),\ldots,y_n(t_0)\right)$ – вектор начальных данных, $F(t,Y)=\left(f_1(t,Y),f_2(t,Y),\ldots,f_n(t,Y)\right)$ – заданная вектор-функция от $n+1$ переменных: независимой переменной $t$ и $n$ зависимых переменных $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t)$.

Предполагается, что для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения $Y=Y(t)$ на всей полупрямой $[t_0,\infty)$. Предполагается, что эти же условия выполнены для всех решений $Y=\tilde{Y}(t)$ с начальными условиями $Y(t_0)=\tilde{Y}_0$, если только

$$0<\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le b, \tag{2}$$

где $b$ – некоторое постоянное число.Здесь и в дальнейшем под знаком $\|\cdot\|$ понимается каноническая норма вектора.

Пусть $E_{n+1}$ – пространство точек $(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)$, или,$(t,Y)$. Пусть $\tilde{E}_{n+1}$ множество всех точек $(t,Y(t))$ и $(t,\tilde{Y}(t))$ в $n+1$-мерном пространстве $E_{n+1}$, где $\tilde{Y}(t)$ – всевозможные решения, получаемые из (2), при $t\in[t_0,\infty)$.

На множестве $\tilde{E}_{n+1}$ предполагаются выполненными условия:

1) функция $F(t,Y)$ определена и непрерывно дифференцируема по $t$ на $[t_0,\infty)$ при $Y=Y(t)$ и всех $Y=\tilde{Y}(t)$ из (2);

2) выполнено условие Липшица

$$\left\|F(t,\tilde{Y})-F(t,Y)\right\|\le L\left\|\tilde{Y}-Y\right\|,\ L=\mathrm{const}; \tag{3}$$

3) существует константа $C_0$, такая что

$$\left\| F_t'(t,Y) \right\| \le C_0, \ \left\| F_t'(t,\tilde{Y}) \right\| \le C_0 \ \forall \big(t,Y(t)\big) \in \tilde{E}_{n+1} \wedge \forall \big(t,\tilde{Y}(t)\big) \in \tilde{E}_{n+1}. \qquad (4)$$

Определение устойчивости по Ляпунову заимствуется из [2] с некоторыми упрощениями, допустимыми в рассматриваемых условиях. Решение $Y = Y(t)$ устойчиво (справа), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, $\delta \le b$, такое что $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta$ влечет $\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) \right\| \le \varepsilon \ \forall t \in [t_0, \infty)$. Решение $Y = Y(t)$ асимптотически устойчиво (справа), если оно устойчиво и найдется $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \le \delta$, такое что $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta_0$ влечет $\lim\limits_{t\to\infty}\big(\tilde{Y}(t) - Y(t)\big) = 0$. Всюду ниже рассматривается устойчивость справа (слева аналогично), которая для краткости называется просто устойчивостью.

Базовая схема излагаемого способа компьютерного анализа устойчивости строится на основе разностных методов приближенного решения ОДУ, ниже для этой цели используется метод Эйлера-Коши. Существенной особенностью при этом является выбор шага численного интегрирования $h$: предполагается, что для каждого произвольного $t \in [t_0, \infty)$, каково бы ни было $i = 0,1,\ldots$,

$$t = t_{i+1}, \ h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \qquad (5)$$

изменение переменной $t$ рассматривается как изменение правой границы промежутка $[t_0, t]$. Иными словами, $h = h(i)$ на любом промежутке $[t_0, t]$, но шаг остается равномерным внутри промежутка.

В [4] на основе тейлоровских разложений невозмущенного решения $Y = Y(t)$ и возмущенного решения $Y = \tilde{Y}(t)$ задачи Коши (1) показано, что для разности между соответственными компонентами возмущенного и невозмущенного решений для любого $t$ из (5) имеет место равенство

$$\tilde{y}_{j\,i+1} - y_{j\,i+1} = \prod_{\ell=0}^{i}\left(1 + \frac{h}{2} d_{j\ell}\right)\left(\tilde{y}_{j0} - y_{j0}\right) + \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=k}^{i}\left(1 + \frac{h}{2} d_{j\ell}\right)\bar{q}_{jk} + \bar{q}_{j\,i+1}, \qquad (6)$$

где величины $\bar{q}_{jk}$ суть $O(h^2)$ и

$$d_{j\ell} = \frac{f_j\big(t_\ell, \tilde{Y}_\ell\big) - f_j\big(t_\ell, Y_\ell\big) + f_j\Big(t_{\ell+1}, \tilde{Y}_\ell + hF\big(t_\ell, \tilde{Y}_\ell\big)\Big) - f_j\Big(t_{\ell+1}, Y_\ell + hF\big(t_\ell, Y_\ell\big)\Big)}{\tilde{y}_{j\ell} - y_{j\ell}}, \ j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

где здесь и всюду ниже всегда предполагается, что $y_j(t) \ne \tilde{y}_j(t) \ \forall t \in [t_0, \infty)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Соотношение (6) является базовым для формулируемых в рамках предложенной схемы условий устойчивости. Первое слагаемое правой части представляет собой главную часть роста возмущения, поскольку не содержит множителя $h$. В [4] на основании условий (3), (4) доказывается, что $\sum_{k=1}^{i}\prod_{\ell=k}^{i}\left(1+\frac{h}{2}d_{j\ell}\right)\bar{q}_{jk}+\bar{q}_{ji+1}\to 0$ при $h\to 0$, что равносильно $i\to\infty$, для любого $t$ из (5). Предельный переход в равенстве (6) влечет

$$\tilde{y}_j(t)-y_j(t)=\lim_{i\to\infty}P_{ji}\left(\tilde{y}_{j0}-y_{j0}\right),\ j=1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

где

$$P_{ji}=\prod_{\ell=0}^{i}\left(1+\frac{h}{2}d_{j\ell}\right). \tag{9}$$

Аналогичные соотношения на основе метода Эйлера приводятся в [5, 6].

Пусть $P_i=\left(P_{1i},P_{2i},\ldots,P_{ni}\right)$, где $P_{ji}$ из (9), $d_{j\ell}$ из (7), $j=1,2,\ldots,n$. Непосредственно на основании (8) формулируются условия устойчивости в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** В условиях 1) – 3) для устойчивости по Ляпунову решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало $\delta>0$, $\delta\le b$, такое, что одновременно для всех решений $Y=\tilde{Y}(t)$ при ограничении $0<\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\delta$ выполняется условие

$$\left\|\lim_{i\to\infty}P_i\right\|\le C,\ C=\mathrm{const}\ \forall t\in\left[t_0,\infty\right). \tag{10}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (10) и нашлось $\delta_0>0$, $\delta_0\le\delta$, такое, что $0<\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\delta_0$ влечет

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}P_i=\vec{0}. \tag{11}$$

Условия (10), (11) реализуются программно. Для этого выполняется циклическое накопление частичных произведений $\left|\prod_{\ell=0}^{i}\left(1+\frac{h}{2}d_{j\ell}\right)\right|$, $j=1,2,\ldots,n$, поведение этих произведений будет определять характер устойчивости решения: если при неограниченном росте $t$ будет наблюдаться ограниченность произведений, это будет означать устойчивость, стремление к нулю – асимптотическую устойчивость, неограниченность – неустойчивость. Такое моделированиесоставляет существо предложенного компьютерного анализа устойчивости.

На практике бесконечные произведения не могут быть вычислены точно. Моделирующая их поведение программа с необходимостью остановится на их приближении конечным числом сомножителей. Возникает вопрос, как такое приближение отразится на достоверности оценки устойчивости – необходимо исследовать поведение левых частей соотношений

(10), (11) в зависимости от количества сомножителей. Решение этого вопроса дано в [4]. Утверждение теоремы 1 переносится на случай частичных произведений $P_i$ с некоторыми оговорками, в частности, в формулировку теоремыдобавляется, помимо требования существования $\delta > 0$, требование существования номера $i_0$ (шага $h_0$), начиная с которого выполняется условие $\left\| P_i \right\| \le C$, $C = \text{const}\ \forall i \ge i_0 \wedge \forall t \in [t_0, \infty)$. Из предельного перехода в неравенстве $\left\| P_i \right\| \le C$ с учетом (10) следует, что это условие является достаточным для устойчивости решения задачи (1).Как показано в[4],при естественных ограничениях замена предельных значений в выражении условий (10), (11) на их конечные приближения сохраняет достоверность оценки устойчивости.

В [4] показана возможность компьютерного моделирования устойчивости при помощи циклического накопления произведений $P_{ji} = \prod_{\ell=0}^{i} \left(1 + \frac{h}{2} d_{j\ell}\right)$, приближаемых как по методу Эйлера-Коши, так и на основе методов Рунге-Кутта иАдамса, аналогичный анализ на основе метода Эйлера выполняется в [5, 6].

**Численный эксперимент по моделированию устойчивости**

Пусть при $t \ge 1$рассматривается система

$$\frac{d y_1}{d t} = \frac{y_1}{t} - t^2 y_1 y_2^{\,2}, \quad \frac{d y_2}{d t} = -\frac{y_2}{t}, \quad y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \qquad (12)$$

общее решение которой $y_1 = c_1 t e^{-c_2^2 t}$, $y_2 = \dfrac{c_2}{t}$ ,где $c_1 = \dfrac{y_{10}}{t_0} e^{t_0^3 y_{20}^2}$, $c_2 = t_0 y_{20}$, $t_0 \ge 1$.

В [2] аналитически доказано, что тривиальное решение системы (12) неустойчиво. Ниже этот же результат получается на основе численного моделирования (код программы полностью приводится в [4]). Программные модели представляют собой стандартные подпрограммы Delphi.

В табл.1 результаты численного эксперимента даны при использовании метода Рунге-Кутта 4-го порядка при начальных данных $t_0 = 1$, $y_{10} = 0$ и $y_{20} = 0$ для шага $h = 10^{-5}$.

Таблица 1

*Численное моделирование неустойчивоститривиального решения системы (12)*

| $t$ | 11.00 | 101.00 | 501.00 | 901.00 | 991.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left\| P_i \right\|$ | 1.109E+0001 | 1.010E+0002 | 5.009E+0002 | 9.009E+0002 | 9.909E+0002 |

Норма произведения $\left\| P_i \right\|$ на промежутке $[1, 1000]$ возросла от значения 11 до 990, что соответствует неустойчивости тривиального решения.

**Замечание 1.** Из равенства (8) следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} P_{ji} = \dfrac{\tilde{y}_j(t) - y_j(t)}{\tilde{y}_{j0} - y_{j0}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $\left\| \lim\limits_{i\to\infty} P_i \right\| = \| Z \|$, где $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ при $z_j = \dfrac{\tilde{y}_j(t) - y_j(t)}{\tilde{y}_{j0} - y_{j0}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Иными словами, аналогично норме произведения $\| P_i \|$ ведет себя отношение разности возмущенного и невозмущенного решений к величине возмущений начальных данных, взятых по норме. Этот факт подтверждается численным экспериментом, результаты которого полностью повторяют данные табл. 1 [4 – 6].

Пусть дана система ОДУ

$$\frac{d y_1}{d t} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}}} - 2 y_1 + y_1 \sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}} - y_2, \quad \frac{d y_2}{d t} = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}}} - 2 y_2 + y_2 \sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}} + y_1, \tag{13}$$

где $y_1(t_0) = y_{10}$, $y_2(t_0) = y_{20}$. Общее решение системы (13) имеет вид

$$y_1 = \left(1 - \frac{1}{t + c_1}\right) \cos\left(t + c_2\right), \; y_2 = \left(1 - \frac{1}{t + c_1}\right) \sin\left(t + c_2\right), \; c_1 = \frac{1}{1 - \sqrt{y_{10}^{\,2} + y_{20}^{\,2}}} - t_0, \; c_2 = \operatorname{arctg} \frac{y_{20}}{y_{10}} - t_0,$$

$y_{10} \neq 0$.

Решения системы (13) с начальными данными $y_{10}^{\,2} + y_{20}^{\,2} < 1$ асимптотически устойчивы, при условии $y_{10}^{\,2} + y_{20}^{\,2} = 1$ – устойчивы, если $y_{10}^{\,2} + y_{20}^{\,2} > 1$ – неустойчивы [3].

В табл.2 результаты численного эксперимента даны при использовании метода Эйлера-Коши для начальных данных $t_0 = 0$, $y_{10} = 0{,}7$ и $y_{20} = 0{,}7$ с шагом $h = 10^{-5}$.

Таблица 2

*Численное моделирование асимптотической устойчивости решения системы (13)*

| $t$ | 10.00 | 100.00 | 400.00 | 900.00 | 1000.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\| P_i \|$ | 1.387E+0000 | 4.320E-0001 | 6.829E-0002 | 2.002E-0002 | 1.371E-0002 |

Норма произведения $\| P_i \|$ на промежутке $[0, 1000]$ убывает к нулю, что согласно (11) интерпретируется как признак асимптотической устойчивости. Стремление нормы к нулю более выражено в случае $y_{10}^{\,2} + y_{20}^{\,2} << 1$ (например, $y_{10} = 0{,}5$ и $y_{20} = 0{,}5$).

В табл.3 данырезультаты численного эксперимента при использовании метода Рунге-Кутта 4-го порядка для начальных данных $t_0 = 0$, $y_{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $y_{20} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ с шагом $h = 10^{-5}$.

Таблица 3

*Численное моделирование устойчивостирешения системы (13)*

| $t$ | 10.00 | 100.00 | 400.00 | 900.00 | 1000.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left\Vert P_i \right\Vert$ | 1.680E+0000 | 1.749E+0000 | 1.803E+0000 | 2.286E+0000 | 1.926E+0000 |

Норма произведения $\left\Vert P_i \right\Vert$ на промежутке $\left[0,\,1000\right]$ изменяется, но в целом не превосходит значения 2.3, что согласно условию (10) является признаком устойчивости.

В табл.4 приведены результаты численного эксперимента при использовании метода Адамса 4-го порядка с шагом $h = 10^{-5}$ для начальных данных $t_0 = 0$, $y_{10} = 0{,}72$ и $y_{20} = 0{,}72$.

Таблица 4

*Численное моделирование неустойчивости решения системы (13)*

| $t$ | 1.00 | 10.00 | 40.00 | 47.00 | 54.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left\Vert P_i \right\Vert$ | 1.746E+0000 | 2.514E+0000 | 2.077E+0001 | 1.017E+0002 | 1.393E+0004 |

Норма произведения $\left\Vert P_i \right\Vert$ на промежутке $\left[0,\,54\right]$ монотонно возрастает с большой скоростью, что в продолжение процесса приводит к переполнению, это – нарушение условия (10) и интерпретируется как неустойчивость. Возрастание $\left\Vert P_i \right\Vert$ более быстро приводит к переполнению при $y_{10}^{\;2} + y_{20}^{\;2} >> 1$.

Для численных экспериментов в табл.2 – 4 можно повторить замечание 1.

Изложенный подход к компьютерному анализу устойчивости отличается от известных [1, 2] построением на основе рекуррентных преобразований разностных схем. Отличия сохраняются относительно современного состояния исследований [7 – 9], включая численное моделирование [10], отличие от [5, 6] заключается в использовании разностных методов более высокого порядка.

**Заключение**

Предложенасхема компьютерного анализа устойчивостидля систем ОДУв нормальной форме на основе рекуррентных преобразований разностных приближений решений задачи Коши. Разность между значениями возмущенного и невозмущенного решений выражается как бесконечное произведение, сомножители которого включают в себя разностные приближения и возмущения начальных данных. Асимптотическое поведение таких произведений однозначно определяет характер устойчивости решения. Необходимым и достаточным условием устойчивости является равномерная ограниченность бесконечных произведений на полуоси. Асимптотическая устойчивость имеет место при стремлении этих произведений к нулю с ростом независимой переменной. Развернутый численный и программный эксперимент представлен в [4].

## Список литературы


1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 480 с.
3. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. М.: Физматлит, 2003. – 224 с.
4. Катрич С. А. Разработка и исследование программного моделирования устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений на основе разностных методов: Автореф.дис. канд. техн. наук. – Таганрог, 2006. – 20 с.
5. Ромм Я.Е. Мультипликативные критерии устойчивости на основе разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 1. – С. 127 – 142.
6. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Математическоемоделирование. – 2008. – Т. 20. – №12. – С. 105 – 118.
7. I.V. Astashova. Application of dinamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – Vol. 126. – № 5. – P. 1361 – 1390.
8. B. Cannas, F. Pisano.A Piecewise Linear Approximation Method for the Evaluation of Lyapunov Exponents of Polynomial Nonlinear Systems // Chaos and Complex Systems. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – P. 439 – 447.
9. Maria Alice Bertolim, Alain Jacquemard. Time switched differential equations and the Euler polynomials // Fondazione Annali di Matematica Puraed Applicata and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
10. K. Wright. Adaptive methods for piecewise polynomial collocation for ordinary differential equations // BIT Numerical Mathematics, 2007, 47. – P. 197 – 212.



**Рецензенты:**

Веселов Г.Е., д.т.н., доцент, директор института компьютерных технологий и информационной безопасности ЮФУ, г. Таганрог;

Карелин В.П., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий ТИУиЭ, г. Таганрог.