УДК 004.3

НЕЧЕТКОЕ МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Мочалов И.А., Хрисат М.С.

Российский университет дружбы народов ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198 email: mohd.khrisat@fet.edu.jo

В этой статье мы обсудим теорию Минимакс согласно этой теории, в простейшем случае, предполагается, что составные единицы линейной модели ошибок ограничена четкие цифры. В этой статье мы покажем, что оценки погрешности минимаксный параметров модели находятся на непредвзятого алгоритма оценки определяется путем решения соответствующего явного задачи линейного программирования. В этой теории, однако, более продвинутые модели ошибок, которые приводят к различным проблемам нелинейной математического программирования на алгоритма оценки параметров. Рассмотрим нечеткое аналог различных проблем минимаксный оценки, в котором предполагается, что нарушения об ошибках нечеткие переменные. Это позволяет синтез нечеткой надежной алгоритма оценки, которая на наш взгляд, более адекватно учитывать нарушения на существующих промышленных систем.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов метод, гибридные данные, случайность, неопределенность.

FUZZY MINIMAX ESTIMATION

Mochalov I.A., Khrisat M.S.

Peoples' Friendship University of Russia 117198, Moscow Miklukho-Maklaya str. 6 email: mohd.khrisat @ fet.edu.jo

In this article, we discuss the theory Minimax according to this theory, in the simplest case, it is assumed that the constituent units of the linear error model is limited to crisp numbers. In this article, we show that the error estimates of the model parameters are minimax for unbiased estimation algorithm is determined by solving the corresponding explicit linear programming problem. In this theory, however, more advanced models of errors that lead to various problems of nonlinear mathematical programming algorithm for estimating the parameters. Consider the fuzzy analogue various problems minimax estimation in which it is assumed that a violation error fuzzy variables. This allows the synthesis of fuzzy robust estimation algorithm, which in our view, a more adequate account violations in existing industrial systems.

Keyword: minimax estimation, fuzzy linear systems, fuzzy model of errors, error disturbances

Задача минимаксного (робастного) оценивания обычно возникает при получении измерений от промышленно-действующего объекта. В этом случае возникают аномальные измерения (выбросы), которые появляются, как правило, при включении/выключении сварочного оборудования, функционировании мощных электроприборов и т.д. Минимаксное оценивания (фильтрация) – это сглаживание «выбросов» по каким либо правилам. Простейшими примерами робастных алгоритмов при обработке измерений являются их усреднение с помощью медианы, отбрасывание крайних членов вариационного ряда измерений при их упорядочивании и затем их усреднение, использование при оценивании плотностей с «тяжелыми хвостами» и т.д.

В настоящее время в основном усилиями российских ученых создана теория минимаксного (гарантированного) оценивания, результаты которой успешно внедрены при обработке телеметрической информации от космических аппаратов, при реализации информационных систем в различного рода управляющих комплексах и на других объектах [1,3,4].

Согласно этой теории в простейшем случае полагается, что модули компонент ошибок линейной модели являются ограниченными четкими числами. Далее показывается, что минимаксная ошибка оценок параметров модели, которые находятся с помощью несмещенного алгоритма оценивания, определяется путем решения соответствующей четкой задачи линейного программирования. В этой же теории рассматриваются более сложные модели ошибок, которые приводят к различным задачам нелинейного математического программирования относительно параметров алгоритма оценивания.

Ниже рассматривается нечеткий аналог различных задач минимаксного оценивания, в которых предполагается, что ошибки возмущений являются нечеткими переменными. Это позволяет синтезировать нечеткий алгоритм робастного оценивания, который на наш взгляд более адекватно учитывает возмущения на промышленно-действующих системах.

1.предварительные сведения [6-8]

Ниже рассматриваются некоторые положения теории нечетких множеств, которые далее будут использованы для разработки общей модели нечетких возмущений и затем для синтеза простейшего алгоритма нечеткого оценивания, реализуемого в виде нечеткой задачи линейного программирования.

1.1. **Нечеткое число** $x_н \in R^1$определяется как отображение $r: R^1 \to [0;1] \in R^1$, где $r(x)$ – функция принадлежностей. Из-за отсутствия взаимной однозначности выделяются «левая» $\underline{r}(x)$ и «правая» $\overline{r}(x)$ ветви относительно $r(x) = 1$, каждая из которых определяет уже взаимно однозначное отображение. В теории нечетких множеств используется эквивалентная уровневая форма представления нечеткого числа, задаваемая в виде обратного отображения $r^{-1}(x): R^1 \ni [0,1] \to R^1$.Для отображения $x(r), r \in [0,1]$ выделяются «нижняя» $\underline{x}(r)$ и «верхняя» $\overline{x}(r)$ ветви.

Таким образом, для нечетного числа $x_н \in R^1$ используется цепочка эквивалентных представлений:

$$x_H \in R^1 \Leftrightarrow r(x), x \in R^1, r \in [0,1] \Leftrightarrow \left(\underline{r}(x); \overline{r}(x) / x \in R^1, \underline{r}, \overline{r}, \in [0,1]\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\underline{x}(r); \overline{x}(r) \ / \ 0 \le r \le 1\right).$$

Относительно $r(x)$ должны выполняться следующие свойства:

(i) функция $r(x)$ полунепрерывна сверху;

(ii) функция $\underline{r}(x)$ монотонно возрастает;

(iii) функция $\overline{r}(x)$ монотонно убывает.

(iv) $\underline{r}(x) \le \overline{r}(x)$.

Кроме этого для $x(r)$ должно выполняться условие $\underline{x}(r) \le \overline{x}(r)$. Если $x(r)$ имеет треугольную форму, то перечисленные свойства выполняются для остроугольного треугольника, поэтому не каждый тупоугольный треугольник может изображать нечеткое число.

Обычно применяется обозначение: $x_H \Leftrightarrow \left(\underline{x}(r), \overline{x}(r)/r \in [0;1]\right)$.

Арифметические операции («+», «-», «x», «÷») для нечетких чисел $x_н$ и $y_н$ определяется соотношением:

$x_H * y_H = z_H \Leftrightarrow max_{x_H * y_H = z_H} \min\left(r(x), r(y)\right)$. (1)

Операции сравнения «≥», «≤» следует из определения [8]: имеем нечеткие числа x_H и y_H такие, что $x_H = (\underline{x}(r);\ \overline{x}(r)/\ 0 \le r \le 1)$, $y_H = (\underline{y}(r);\ \overline{y}(r)/\ 0 \le r \le 1)$, тогда $x_H \gtreqless y_H$ если :

$$T(x_H) = \int_0^1 r\left[\underline{x}(r) + \overline{x}(r)\right]dr \gtreqless \int_0^1 r\left[\underline{y}(r) + \overline{y}(r)\right]dr = T(y_H).$$

Совокупность нечетких чисел образует банахово пространство [4].

В теории нечетких множеств помимо общего определения нечеткого числа, которое приведено выше, часто в теоретических исследованиях используются треугольные нечеткие числа [6]. Они имеют функцию принадлежностей «r» в виде треугольника с острыми углами в его основании. Этому соответствует тройка чисел $a_1<a_2<a_3$, где основание supp r $=[a_1, a_3]$, а координата высоты (ядро) core $r=a_2$. Для нечеткого числа N(x), $x \in R^1$ с треугольной формой принято обозначение $N(x)=(a_1/a_2/a_3)$. Различают следующие типы N(x): если $a_1>0$, то $N(x)>0$; если $a_1 \geq 0$, то $N(x) \geq 0$; если $a_3<0$, то $N(x)<0$; если $a_3 \leq 0$, то $N(x) \leq 0$.

1.2. **Нечеткая функция** $\varphi_н(x)$ определяется как отображение $\varphi_н$: $R^1 \rightarrow F = \{r(x)\}$, где F - совокупность функций принадлежностей $r(x)$. Это отображение параметризуется относительно r$\in$ $[0,1]$ и может быть представлено в виде [8]:

$$\varphi_H(x) = (\underline{\varphi}(x,r); \overline{\varphi}(x,r)\ /\ \ 0 \le r \le 1).$$

По аналогии с (1) для нечеткой функции $\varphi_н(x)$ вводится критерий:

$$T\left(\varphi_H(x)\right) = \int_0^1 r\left[\underline{\varphi}(x,r) + \overline{\varphi}(x,r)\right]dr.$$

Имеют место следующие утверждения:

— нечеткая функция $\varphi_н(x)$ монотонно возрастает (убывает), если для любых x_1 и x_2 выполняется: $x_1 \le x_2 \Rightarrow T\left(\varphi_H(x_1)\right) \le T\left(\varphi_H(x_2)\right)\left(x_2 \le x_1 \Rightarrow T\left(\varphi_H(x_2)\right) \le T\left(\varphi_H(x_1)\right)\right)$;

— нечеткая функция $\varphi_н(x)$ непрерывна для $x \in [c,d] \subset R^1$, если $T(\varphi_н(x))$ непрерывна;

1.3. **Нечеткая производная интеграл** [6,8]. Арифметическая операция «сложения» задается в соответствии с принципом обобщения по (1), а операция «вычитания» путем введения «обратного» элемента в соответствующем нечетком векторном пространстве.

Предельный переход, который появляется при вычислении нечеткой производной, определяется в смысле сходимости по метрике ρ в нечетком векторном пространстве:

$$\rho(x_H, y_H) = \sup_r \left\{ \max \left[\left| \underline{x}(r) - \underline{y}(r) \right|, \left| \overline{x}(r) - \overline{y}(r) \right| \ / \ 0 \leq r \leq 1 \right] \right\}.$$

- нечеткая функция $\varphi_{н}(x)$ дифференцируема, если $T(\varphi_{н}(x))$ дифференцируема; производная от нечеткой функции $\varphi_{н}(x)$ равна $\varphi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{\varphi}(x, r);\ \frac{\partial}{\partial x} \overline{\varphi}(x, r) \ / \ 0 \leq x \leq 1 \right)$;

- нечеткая функция $\varphi_{н}(x)$ интегрируема по Риману, если $T(\varphi_{н}(x))$ интегрируема; интеграл от нечеткой функции $\varphi_{н}(x)$ равен

$$\int_c^d \varphi(x) dx = \left(\int_c^d \underline{\varphi}(x, r) dx; \int_c^d \overline{\varphi}(x, r) dx \ / \ \ 0 \leq x \leq 1 \right).$$

Приведенные утверждения показывают, что нетрудно сконструировать нечеткие аналоги основных структур классического математического анализа: максимум (минимум) нечеткой функции, нечеткие точки перегиба, нечеткие дифференциалы, касательные и т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ [6]. В теории нечетких дифференциальных уравнений введенную выше нечеткую производную принято называть GVD-Goetschel/Voxman derivative. Помимо этой производной существуют другие типы нечетких производных:

— производная SD-Seikkala derivative;

— производная DPD-Dubois/Prade derivative;

— производная PRD-Puri/Ralescu derivative;

— производная KFMD-Kandel/Friedman/Ming derivative;

— другие более абстрактные производные.

Все эти перечисленные нечеткие производные отличаются между собой используемой метрикой и применяются для разрешения нечеткой начальной задачи, а также для решения простейших нечетких дифференциальных уравнений в частных производных. Взаимосвязь перечисленных нечетких производных следует из следующих утверждений для нечетких производных $\dot{\varphi}_H(t)$:

— если $\exists\ \dot{\varphi}_H^{GV}(t)$, то $\exists\ \dot{\varphi}_H^{s}(t)$ и $\dot{\varphi}_H^{GV}(t) = \dot{\varphi}_H^{s}(t)$;

— если $\exists\ \dot{\varphi}_H^{PR}(t)$, то $\exists\ \dot{\varphi}_H^{s}(t)$ и $\dot{\varphi}_H^{PR}(t) = \dot{\varphi}_H^{s}(t)$;

— если $\exists\ \dot{\varphi}_H^{KFM}(t)$, то $\exists\ \dot{\varphi}_H^{s}(t)$ и $\dot{\varphi}_H^{KFM}(t) = \dot{\varphi}_H^{s}(t)$;

— если $\exists\ \dot{\varphi}_H^{s}(t)$, то $\dot{\varphi}_H^{s}(t) = \dot{\varphi}_H^{DP}(t)$.

Далее будем использовать $\dot{\varphi}_H^{GV}(t)$. Для простоты обозначений верхний индекс GV будем опускать и соответствующую нечеткую производную будем обозначать $\dot{\varphi}_H(t)$.

1.4. **Нечеткие случайные величины** [7]. Тройка (Ω_H, B_H, P_H) определяет нечеткое вероятностное пространство, где Ω_H-пространство элементарных нечетких случайных событий, Bн- борелевская нечеткая алгебра; Pн- вероятностная мера на борелевской нечеткой алгебре. Пространство $\Omega_H = \{w_{Hi}\}$ –совокупность нечетких случайных событий с функцией принадлежностей $r_i \in [0,1]$, которые могут появиться в результате нечеткого эксперимента Эн. Здесь w_{Hi} – неразложимый нечеткий исход Эн. Нечеткая алгебра $A_H = \{A_{Hi}$ с операциями $(T), (S), (-)$над Ahi $\}$, где A_{Hi}-нечеткое случайное событие ($A_{Hi} \supset \Omega_H$), T,S-нормы в Aн, «-» нечеткое отрицание. В нечеткой алгебре Aн операции не фиксируются, а перечисляются лишь их свойства, поэтому существует бесчисленное число нечетких алгебр {Aн}. Задавая операции T, S, «-» по заде для A_{Hi} из {Aн} выделяют «борелевскую» нечеткую алгебру$B_H \subset \{A_H\}$. Отображение P:A→R_1 со свойствами (i) 0≤P(A_{Hi})≤1; (ii) $P(\Omega_H) = 1$; (iii) $\forall A_{Hi}. A_{Hj}: A_{Hi} \wedge A_{Hj} = 0_H \Longrightarrow P(A_{Hi} \cup A_{Hj}) = P(A_{Hi}) +$ $+P(A_{Hj})$. Имеет место совокупность формул нечетких вероятностей.

Нечеткая случайная величина x_a определяется путем отображения $X_a: \Omega_H \to R_0 =$ $= \{r_{A_i} \in [0;1] \subset R_1\}$. Функция распределения $F_{X_A}(x)$ определяется в виде:$F_{X_A} = P_H\{X_A < x\} = \int_{-\infty}^{x} r_A \cdot f_{x_A}(u)du$, где $f_{x_A}(x) = \dot{F}_{X_A}(x)$. Математическое ожидание EX_A определяется как:$EX_A = \sum_{i=1}^{n} A_{Hi} \cdot P_{Hi}$, где A_{Hi}-нечеткое случайное событие; P_{Hi}-нечеткая вероятность появления A_{Hi}. Очевидно, что EX_A является нечетким множеством.

В совокупности $\{X_{A_j}\}$ с заданными операциями «сложения» и «умножения» на число «к» [8] вводится метрика Хаусдорфа (x):

$$\rho_x^2\left(X_{A_i}, X_{A_j}\right) \equiv \rho_x^2(x_i, x_j) = \max_{0 \le r \le 1} \left\{\underline{\rho}_x^2 \cdot \overline{\rho}_x^2\right\} = \underline{\rho}_x^2 + \overline{\rho}_x^2 =$$

$$= \int_0^1 \left\{\left[\overline{x}_i(r) - \overline{x}_j(r)\right]^2 + \left[\underline{x}_i(r) - \underline{x}_j(r)\right]^2\right\} dr =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 (\overline{x}_i^2 + \underline{x}_i^2) dr}_{\langle x_i, x_i \rangle} - 2 \underbrace{\int_0^1 (\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j + \overline{x}_i \cdot \overline{x}_j) dr}_{cov\,(x_i, x_j)} + \underbrace{\int_0^1 (\overline{x}_j^2 + \underline{x}_j^2) dr}_{\langle x_j, x_j \rangle} =$$

$= \langle x_i, x_i \rangle - 2cov\left(x_i, x_j\right) + \langle x_j, x_j \rangle$. Здесь приняты обозначения: $\overline{\rho}_x, \underline{\rho}_x$ - верхняя и нижняя полуметрики Хаусдорфа соответственно; $\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)$- верхняя и нижняя ветви соответственно уровнего представления $x_i(r)$ функции принадлежностей нечеткого множества X_{A_j}; $cov\,(x_i, x_j)$- ковариация между X_{A_i} и X_{A_j}. Непосредственно из определения $cov\,(\cdot)$ следует:$DX_{A_i} = Dx_i = cov\,(x_i, x_j)\big|_{x_j = x_i}$- дисперсия нечеткой случайной величины X_{A_i}, которая является четким числом. Расчеты показывают, что в пространстве $\left\{X_{A_j}, \rho_{X_i}\right\}$имеем :$\left|EX_{A_i}\right| = \left\|EX_{A_i}\right\|_x$ – которое является четким числом.

1.5. **Нечеткие линейные системы** [5]. Нечеткая система линейных уравнений (nxn) имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = y_{Hi} \quad i = \overline{1,n}$$

где $A = a_{ij}, 1 \le i,j \le n$ −матрица (n x n) из четких a_{ij} элементов; y_{Hi}-нечеткие переменные $(1 \le i \le n)$.

Две четкие (n x n) линейные системы для всех «i» называются расширенной (2n x 2n) четкой линейной системой, если:

-$a_{ij} \ge 0, i,j = \overline{1,n}$ тогда $s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}$;

- $a_{ij} < 0, i,j = \overline{1,n}$ тогда $s_{ij+n} = s_{i+n,j} = a_{ij}$.

Другими словами $s_1, s_2: s_1 - s_2 = A, s_1 + s_2 = |A| = \left(|a_{ij}|\right), i,j = \overline{1,n}$ и используя матричное (2n x 2n) обозначение имеем:

$SX = Y$,

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ -s_2 & s_1 \end{pmatrix}_{(2n\times 2n)}; X = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \overline{x} \end{pmatrix}_{(2n\times 1)}; Y = \begin{pmatrix} \underline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix}_{(2n\times 1)};$$

$$\underline{x}^T = \left(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\right); \overline{x}^T(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n); \underline{y}^T = \left(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n\right); \overline{y}^T\left(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n\right).$$

Теорема 2.4.1. Для существования и единственности решения X_* расширенной системы $SX = Y$ необходимо и достаточно, чтобы $\left(s_{ij}\right)^{-1} > 0$, т.е. S^{-1}-неотрицательная матрица.

Теорема 2.4.2. Для того, чтобы матрица S была не вырождена необходимо и достаточно, чтобы (s_1-s_2) и (s_1+s_2) обе матрицы были не вырождены.

Если все компоненты нечеткого вектора X_* являются нечеткими треугольными числами, то решение X_* системы $SX = Y$ принято называть «сильным». В противном случае после соответствующих замен [5] решение X_* называют «слабым» решением.

2. Нечеткая модель ошибок

Пусть имеем:

$$\begin{cases} Y_H = F\left(A_H, X(t), \eta_H\right) + \xi_H - \text{нечеткая модель процесса}; \ (2) \\ R_H = G(A_H, \theta_H) - \ \text{нечеткая модель оценки параметра } A_H. (3) \end{cases}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $Y_H^T = (y_{H1}, \dots, y_{Hn})$ – нечеткий вектор измерений; $F^T = \left(f_1, \dots, f_m\right)$– четкая вектор-функция;$A_H^T = (a_{H1}, \dots, a_{Hn})$-нечеткий вектор параметров; $X^T(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right) -$ четкий вектор базисных функций; η_H, θ_H – нечеткие векторы ошибок для Yн, Rн; $\xi_H = \xi_H' + \xi_H''(\alpha)$– нечеткий вектор ошибок; ξ_H' – нечеткая случайная составляющая ошибок; $\xi_H''(\alpha)$ – нечеткая систематическая составляющая ошибок; α – вектор мешающих параметров.

Решение (2) относительно Aн дает вектор нечетких оценок $\widetilde{A}_H$:

$\widetilde{A}_H = \phi(Y_H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполнено:

$\widetilde{A}_H|_{\widetilde{A}_H = A_H} = \phi(Y_H)$,

то Ф определяет нечеткий несмещенный алгоритм оценивания. Найдем выражение для компонент нечеткого вектора ошибок σ_H. Будем полагать, что вектор α мал относительно α=0. Так как $\xi''_H = \xi''_H(\alpha)$ нечеткая систематическая ошибка, поэтому тейлоровское приближение относительно α=0 дает:

$$Y_{Hu} = F(A_H, \alpha = 0) + \frac{\partial Y_{Hu}(\alpha = 0)}{\partial \alpha} \cdot \alpha + 0(\alpha),$$

откуда:

$$\underbrace{Y_{Hu} - F(A_H, \alpha = 0)}_{\xi''_H(\alpha)} \simeq \frac{\partial Y_{Hu}(\alpha = 0)}{\partial \alpha} \cdot \alpha,$$

поэтому:

$$\xi''_H(\alpha) \simeq \frac{\partial Y_{Hu}(\alpha = 0)}{\partial \alpha} \cdot \alpha. \qquad (4)$$

Аналогично полагая, что $\eta_H(\mu), \theta_H(\mu)$ зависят от вектора мешающих параметров μ, который мал относительно $\mu = 0$, будем иметь в результате тейлоровских приближений:

$$\underbrace{Y_{Hu} - F(A_H, \mu = 0)}_{\eta_H} \simeq \frac{\partial Y_{Hu}(\mu=0)}{\partial \mu} \cdot \mu \Rightarrow \mu = \frac{\partial Y_{Hu}(\mu=0)}{\partial \mu} \cdot \mu; \qquad (5)$$

$$R_{Hu} - G\underbrace{(A_H, \mu = 0)}_{\theta_H} \simeq \frac{\partial R_{Hu}(\mu=0)}{\partial \mu} \cdot \mu \Rightarrow \theta_H = \frac{\partial R_{Hu}(\mu=0)}{\partial \mu} \cdot \mu. \qquad (6)$$

Для нечеткого вектора $\widetilde{A}_H$ оценок имеем:

$$\widetilde{A}_H = \phi(Y_H)|_{Y_H = Y_{Hu} + \xi_H} = \phi(Y_{Hu} + \xi_H)\big|_{Y_{Hu} = F(\cdot) + \eta_H} = \phi\big(F(A_H, \mu = 0) + \eta_H + \xi_H\big) \simeq$$

$$\simeq \phi\big(F(A_H, \mu = 0)\big) \frac{\partial \phi}{\partial Y_u} (\eta_H + \xi_H).$$

Полагаем, что алгоритм оценивания не смещен, поэтому:

$$\widetilde{A}_H = \phi(Y_H)|_{Y_H = Y_{Hu} + \xi_H} = \phi(Y_{Hu} + \xi_H)\big|_{Y_{Hu} = F(\cdot) + \eta_H} = \phi\big(F(\cdot) + \eta_H + \xi_H\big) \simeq \underbrace{\phi\big(F(\cdot)\big)}_{A_H} +$$

$$+ \frac{\partial \phi(\eta_H = 0)}{\partial Y_{Hu}} \cdot \eta_H + \frac{\partial \phi(\xi_H = 0)}{\partial Y_{Hu}} \cdot \xi_H = A_H + \frac{\partial \phi(\eta_H = 0, \xi_H = 0)}{\partial Y_{Hu}} \cdot (\eta_H + \xi_H)$$

Таким образом для нечеткой ошибки $x_H = \widetilde{R}_H - R_{Hu}$ получим:

$$R_{Hu} = G(A_H)|_{A_H = \widetilde{A}_H} \Rightarrow \widetilde{R}_H = G(\widetilde{A}_H) = G\left(A_H + \frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial Y_{Hu}} (\eta_H + \xi_H)\right) = G(A)|_{G(\cdot) = R_{Hu} - \theta_H} +$$

$$+ \frac{\partial G(\cdot)}{\partial A} \cdot \frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial Y_{Hu}} (\eta_H + \xi_H) \Rightarrow \underbrace{\widetilde{R}_H - R_{Hu}}_{x_H} = \frac{\partial G(\cdot)}{\partial A} \cdot \frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial Y_{Hu}} \left(\eta_H + \xi_H|_{\underset{(4)-(6)}{\xi_H = \xi'_H + \xi''_H}}\right) - \theta_H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_H = \frac{\partial G(\cdot)}{\partial A}\cdot\frac{\partial \phi(\cdot)}{\partial Y_{Hu}}\left(\xi' + \underbrace{\frac{\partial Y_{Hu}(\cdot)}{\partial \alpha}\cdot\alpha}_{\xi_H^{"}} + \underbrace{\frac{\partial Y_{Hu}(\cdot)}{\partial \mu}\cdot\mu}_{\eta_H}\right) - \underbrace{\frac{\partial R_{Hu}(\mu=0)}{\partial \mu}}_{\theta_H}\cdot\mu \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_H = (\xi_H, \eta_H, \theta_H)$– нечеткий вектор ошибки для (2), (3), где $\xi_H = \xi_H^{'} + \xi_H^{"}, \xi_H^{'}$– вектор нечеткой случайной ошибки при измерении (2), $\xi_H^{"}$ – вектор нечеткой ошибки при измерении (2); η_H – нечеткий вектор ошибки в задании F; θ_H– нечеткий вектор ошибки в задании G.

Рассмотрим характеристики $Ex_{H,}Dx_H$ нечеткого случайного вектора x_H, где E, D – операторы математического ожидания и дисперсии соответственно, fx_H – плотность $x_н$. Обычно рассматривают следующие типы моделей:

1. Плотность $f\sigma_H$ задана; $Ex_H \in M\{M_i\}, i = 1; Dx_H \in N = \{N_k\}, k = 1;$
2. Плотность $f\sigma_H$ неизвестна; $Ex_H \in M\{M_i\}, i = 1; Dx_H \in N = \{N_k\}, k = 1;$
3. Плотность $f\sigma_H$ задана; $Ex_H \in M\{M_i\}, i > 1; Dx_H \in N = \{N_k\}, k > 1;$
4. Плотность $f\sigma_H$ неизвестна; $Ex_H \in M\{M_i\}, i > 1; Dx_H \in N = \{N_k\}, k > 1.$

При $x_H = x$ модель 1 обычно рассматривается в традиционной теории вероятностей и математической статистике. Модель 2 при $x_H = x$ традиционно реализуется в теории четкого робастного оценивания. Модели 3, 4 возникают при модификации известных алгоритмов минимаксного оценивания в их нечеткие аналоги.

Ниже рассматривается простейший алгоритм нечеткого минимаксного оценивания в виде эквивалентного решения задачи четкого линейного программирования.

3. Постановка задачи

Пусть (2) задано в виде простейшей нечеткой линейной модели:

$$Y_H(t) = y_H(t) = \underbrace{X(t)}_{(1\times m)}\cdot\underbrace{A_H}_{(m\times 1)} + \xi_H(t), t \in [0;1] \subset R_1, \qquad (7)$$

где $A_H^T = (a_{H1}, \dots, A_{Hm})$– нечеткий (нижний индекс «н») вектор неизвестных параметров; $X(t) = \left(x_1(t), \dots, x_m(t)\right)$– заданный четкий вектор базисных функций, вид которых известен; $\xi_H(t)$ – нечеткая ошибка (помеха).

При $t_1 = a, t_2, \dots, t_N = b, N = (b-a)/\tau, \tau \in R_1$ имеем:

$$\underbrace{Y_H}_{(N\times 1)} = F\left(A_H, X(t), \eta_H\right) + \xi_H\Big|_{\substack{\eta_H = 0 \\ F(\cdot) = X\cdot A_H \\ t: t_1,\dots,t_N}} = XA + \xi_H, \qquad (8)$$

где $Y_H(t) = \left(y_{H1}, \dots, y_{HN}\right)$– нечеткий вектор измерений модели процесса (2); $X = \left(x_i(t_j)\right)$ $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,N}$ – матрица $\dim X = (m \times N)$, составленная из базисных функций в моменты времени $t_j, j = \overline{1,N}; \xi_H = (\xi_{H1}, \dots, \xi_{HN})$– нечеткий вектор ошибок измерений.

Простейшие модели (7), (8).

<u>Пример 1</u>. $y_H(t) = a_{H1}x_1(t) + \xi_H\big|_{x_1(t)=1} = a_{H1}\cdot 1 + \xi_H(t)$– модель (7);

$$\begin{cases} y_H(t_1) = a_{H1}\cdot 1 + \xi_H(t_1) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ y_H(t_N) = a_{H1}\cdot 1 + \xi_H(t_N) \end{cases} \quad \underbrace{Y_H}_{(N\times 1)} = \underbrace{X}_{(N\times 1)} \cdot \underbrace{A_H}_{(1\times 1)} + \underbrace{\xi_H}_{(N\times 1)}$$ – модель (8).

<u>Пример 2</u>. $y_H(t) = a_{H1}x_1(t) + \xi_H\big|_{x_1(t)=t} = a_{H1}\cdot t + \xi_H(t)$– модель (7);

$$\begin{cases} y_H(t_1) = a_{H1}\cdot t_1 + \xi_H(t_1) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ y_H(t_N) = a_{H1}\cdot t_N + \xi_H(t_N) \end{cases} \quad \underbrace{Y_H}_{(N\times 1)} = \underbrace{X}_{(N\times 1)} \cdot \underbrace{A_H}_{(1\times 1)} + \underbrace{\xi_H}_{(N\times 1)}$$ – модель (8).

<u>Пример 3</u>. $y_H(t) = a_{H1}x_1(t) + a_{H2}x_2(t) + \xi_H\big|_{\substack{x_1(t)=1 \\ x_2(t)=t}} = a_{H1}\cdot 1 + a_{H2}\cdot t + \xi_H(t)$–модель (7);

$$\begin{cases} y_H(t_1) = a_{H1}\cdot 1 + a_{H2}t_1 + \xi_H(t_1) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_H(t_N) = a_{H1}\cdot 1 + a_{H2}t_{N+}\,\xi_H(t_N) \end{cases} \quad \underbrace{Y_H}_{(N\times 1)} = \underbrace{X}_{(N\times 2)} \cdot \underbrace{A_H}_{(2\times 1)} + \underbrace{\xi_H}_{(N\times 1)}$$ – модель (8).

Задача нечеткого робастного оценивания состоит в нахождении четких весовых коэффициентов $z_i, i=\overline{1,N}$ для нечетких измерений $y_{Hi}, i=\overline{1,N}$ из условия эффективности заданного критерия (3) и несмещенности алгоритма оценивания.

Конкретизируем (3). Для этого в отсутствии систематической ошибки $\theta_H = 0$ задаем ее в виде линейной зависимости:

$$\underbrace{R_H}_{(1\times 1)} = G(A_H,\theta_H)|_{\theta_H=0} = G(A_H) = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{Hi} = \underbrace{(c_1,\dots,c_m)}_{C^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{H1} \\ \vdots \\ a_{Hm}\end{pmatrix}}_{A_H} = C^T\cdot A_H, \qquad (9)$$

где $c_i, i=\overline{1,m}$ – заданные четкие числа. Для линейного относительно нечетких измерений $y_{Hi}, i=\overline{1,N}$ алгоритма нахождения нечеткой оценки $\widetilde{R}_H$ параметра R_H имеем:

$$\underbrace{\widetilde{R}_H}_{(1\times 1)} = \sum_{i=1}^{N} z_i\, y_{Hi} = \underbrace{Z}_{(1\times N)} \cdot \underbrace{Y_H}_{(N\times 1)},$$

где z_i , $i=\overline{1,N}$– четкие весовые коэффициенты нечетких измерений $y_{Hi}, i=\overline{1,N}$. Ищем такой алгоритм оценивания, т.е. z_i , $i=\overline{1,N}$, который был бы несмещенным $\left(\widetilde{R}_H\big|_{\xi_H=0} \equiv R_H\right)$. Это приводит после преобразований к условиям:

$$\underbrace{c_1a_{H1}+\dots+c_ma_{Hm}}_{R_H} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} z_i y_{Hi}}_{\widetilde{R}_H}\Bigg|_{\substack{y_{Hi}=\sum_{j=1}^{m} a_{Hj}x_j(t_i)+\xi_{Hi} \\ \xi_{Hi}=0}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c_1a_{H1}+\dots+c_ma_{Hm} = a_{H1}\sum_{i=1}^{N} z_i x_1(t_i) + \dots + a_{HN}\cdot\sum_{i=1}^{N} z_i x_m(t_i)$, откуда после приравнивания коэффициентов при $a_{Hk}, k=\overline{1,m}$ получим:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} z_i x_1(t_j) = c_1 \\ \qquad\vdots \\ \sum_{j=1}^{N} z_i x_m(t_j) = c_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{(z_1,\dots,z_N)}_{Z}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t_1) & \dots & x_m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(t_N) & \dots & x_m(t_N)\end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix} \Leftrightarrow ZX = C. \qquad (10)$$

Задается моделью 4 для ошибок:

$$|Ex_H|\Big|_{\eta_H=\theta_H=\xi''_H=0} = |Ex_H| \leq 0; 0 \leq D\xi'_H \leq \sigma^2; \left|K\left(\xi'_{Hi}, \xi'_{Hj}\right)\right|\Big|_{i\neq j} = \left|K_{Hij}\right| \leq K, \qquad (11)$$

где $|Ex_H| = \|\cdot\|$ – модуль (длина) нечеткой переменной Ex_H в нечетком вероятностном пространстве; Δ, σ^2, k – заданные четкие числа; K_{Hij} – нечеткий коэффициент корреляции. Находим max $\left|E\xi'_H\right|$ и max $D\xi'_H$. Для этого находим x_H:

$$x_H = \widetilde{R}_H - R_H = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} z_i y_{Hi}\right)}_{\widetilde{R}_H} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{Hi}\right)}_{R_H}\Bigg|_{(7)} = \underbrace{\left[\left(\sum_{i=1}^{m} z_i x_i(t_i)\right) - c_1\right]}_{0-\text{несмщ.}(\mathbf{9})} a_{H1} +$$

$$+ \cdots + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{m} z_i x_m(t_i) - c_m\right]}_{0-\text{несмщ.}(\mathbf{9})} \cdot a_{Hm} + \sum_{i=1}^{N} z_i \xi'_H(t_i) = \sum_{i=1}^{N} z_i \xi'_H(t_i).$$

Таким образом, для несмещенного алгоритма (10) имеем:

$$x_H = \widetilde{R}_H - R_H = \sum_{i=1}^{N} z_i \xi'_H(t_i),$$

поэтому для математического ожидания E получим:

$$Ex_H = E\underbrace{\left(\textstyle\sum_{i=1}^{N} z_i \xi'_H(t_i)\right)}_{x_H} = \textstyle\sum_{i=1}^{N} z_i E\xi'_H(t_i),$$

откуда:

$$\max|Ex_H| = max\left|\sum_{i=1}^{N} z_i E\xi'_H(t_i)\right| \leq \max\left|\sum_{i=1}^{N} z_i\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{N} E\xi'_H(t_i)\right| \leq 0 \cdot \max\left|\sum_{i=1}^{N} z_i\right|.$$

Для дисперсии D по аналогии имеем:

$$Dx_H = D\left(\tilde{R}_H - R_H\right) = D\left(\sum_{i=1}^{N} z_i \xi'_H(t_i)\right)\Bigg|_{\substack{Z^T=(z_1,\ldots,z_N)\\ \theta=\left(\xi'_{H1,\ldots,}\xi'_{HN}\right)}} = (Z.\theta) = Z(D\theta)Z^T.$$

Элемент $D_{ij} = cov\left(\xi'_{Hi}, \xi'_{Hj}\right)$ дисперсионной матрицы $D\theta$ равен:

$$D_{ij} = K_{ij}\left(D\xi_i \cdot D\xi_j\right)^{1/2},$$

поэтому с учетом $0 \leq D\xi'_H \leq \sigma^2; \left|K_{ij}\right| \leq k$ после преобразования получим [3]:

$$\max Dx_H = \sigma^2(1-k) \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i + \sigma^2 k\left(\sum_{i=1}^{N} |z_i|\right)^2.$$

Определим составной критерий β_H:

$$\beta_H^2 = (\max Ex_H)^2 + \max Dx_H,$$

тогда после подстановки вычисленных ранее max E_{X_H} и max D_{X_H} получим:

$$\beta_H^2 = \left(\Delta^2 + k\sigma^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}|z_i|\right)^2 + \sigma^2(1-k)\cdot\sum_{i=1}^{N} z_i{}^2$$

поэтому задача нечеткого минимаксного оценивания имеет вид:

$$\begin{cases} \min\limits_{Z} \beta_H^2 \\ \text{при условиях:} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} z_i x_i(t_i) = c_1, \dots, \sum\limits_{i=1}^{N} z_i x_2(t_i) = c_{m.} \end{cases}$$

Эта задача относительно Z_i является задачей нелинейного программирования и обычно решается численным методом.

В частном случае при $k = 0; \sigma = 0; \Delta = 1$ имеем:

$$\begin{cases} \min\limits_{Z_i} \sum\limits_{i=1}^{N} |z_i| \\ \text{при условии: } \mathrm{Z}\cdot\mathrm{X} = \mathrm{C}, \text{где} \\ Z = (z_1, \dots, z_N); c^T = (c_1, \dots, c_m); X = x_i(t_j), i = \overline{1,m}\,, j = \overline{1,N}. \end{cases}$$

Ниже будем рассматривать решение (10).

4. Метод решения

Для простоты рассмотрим решение (10) и покажем, что путем соответствующей замены, она может быть преобразована к соответствующей задаче линейного программирования [1]. Совокупность элементов $Z_i, i = \overline{1,N}$ в общем случае может не удовлетворять условию $Z_i \geq 0, \forall i = \overline{1,N}$, которое требуется в типовой задаче линейного программирования. Совокупность Z_i разбивается на две группы: положительных и отрицательных величин. Для них вводиться замена переменных:

$$\begin{cases} Z_i = Z_i^{'}, Z_i^{'} \geq 0, \text{если } Z_i \geq 0; \\ Z_i = -Z_i^{''}, Z_i \geq 0 \text{ если} Z_i < 0 \end{cases}$$

Эти группы переменных дополняются нулями для получения полных строк:

$$Z_i = \begin{cases} Z_i^{'}, & Z_i^{''} = 0 \\ -Z_i^{''}, & Z_i^{'} = 0. \end{cases}$$

В результате получим векторное соотношение $Z = Z' - Z^{''}$ и кроме того, $||Z_i| = Z_i^{'} + +Z_i^{''}, i = \overline{1,N}$. Таким образом (10) преобразуется к виду:

$$\min_{Z_i^{'}, Z_i^{''}} \sum_{i=1}^{N} \left(Z_i^{'} + Z_i^{''}\right)$$

при условии:

1. $\left(Z_i^{'} - Z_i^{''}\right) X = C;$

2. $Z_i^{'} \geq 0; Z_i^{"} \geq 0, i = \overline{1,N}$;

3. $Z_i^{'} = 0$ при $Z_i^{"} \neq 0; Z_i^{"} = 0$, при $Z_i^{'} \neq 0$.

В [4] доказано, что условие 3 выполняется всегда, поэтому его можно исключить. После очередных замен получим:

$$U = (Z' \vdots Z^{"})_{(1\times 2N)}; V = \begin{pmatrix} x \\ \cdots \\ -x \end{pmatrix}_{(2N\times 2)}.$$

Это приводит к стандартной задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \qquad\qquad \min\limits_{u_i} \sum\limits_{i=1}^{2N} u_i \\ \text{при условии} \qquad\qquad\qquad\qquad (13) \\ \qquad 1. U_{(1\times 2N)} \cdot V_{(2N\times m)} = C_{(1\times m)}; \\ \qquad 2. u_i \geq 0, i = \overline{1,N}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В (11) рассматривалась модель ошибок, в которой вводилась переменная $|Ex_H|$. Из постановки задачи следует, что x_H – нечеткая переменная, а из п.2.4. очевидно, что Ex_H также является нечеткой переменной, поэтому $|Ex_H|$ это расстояние вектора Ex_H в нечетком векторном пространстве случайных переменных до начала координат в смысле введенной нормы в этом пространстве. Это означает, что $||Ex_H|$ является четким числом, а задача (13) это задача четкого линейного программирования, которая решается стандартными методами, например¸ симплекс-методом.

5. Пример

Пусть в результате решения четкой задачи линейного программирования при N=2 – число измерений и m=2 – число условий несмещенность алгоритма оценивания (10) было получено $Z^T = (a_1; a_2)$, где $a_1; a_2$ – четкие числа с функциями принадлежностей $r(a_i) = = singl\ a_i, i = 1,2$. Тогда нечеткий алгоритм оценивания будет иметь вид:

$$\widetilde{R}_H = a_1 \cdot y_{H1} + a_2 \cdot y_{H2}, a_i \geq 0, i = 1,2,$$

где $y_{Hi}, i = \overline{1,2}$ – текущие нечеткие числа с треугольными функциями принадлежностей $r(y_i)$, которые заданы в форме (п.2.1.):

$$r(y_{Hi}) = (\alpha_{i1} \ / \ \alpha_{i2} \ / \ \alpha_{i3}); \alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \alpha_{i3}, \alpha_{ij} \in R_1, \alpha = 1,2, j = \overline{1,3},$$

где $supp\, r(y_{Hi}) = [\alpha_{i1}, \alpha_{i3}]$ – основание нечетких чисел; $core\, r(y_{Hi}) = \alpha_{i2}$ – координаты высот нечетких чисел; $\alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \alpha_{i3}$.

Найдем функцию принадлежностей $r(\widetilde{R})$ оценки $\widetilde{R}$. В соответствии с принципом расширения для арифметических операций умножения и сложения нечетких чисел получим [7]:

$$B_{1H} = a_1 \cdot y_{H1} = \underbrace{(a_{12} \ / \ a_{12} \ / \ a_{12})}_{singl\, a_1} \cdot \underbrace{(\alpha_{11} \ / \ \alpha_{12} \ / \ \alpha_{13})}_{y_{H1}} = (a_{12}\alpha_{11} \ / \ a_{12}\alpha_{12} \ / \ a_{12}\alpha_{13});$$

$$B_{2H} = a_2 \cdot y_{H2} = \underbrace{(a_{22} \,/\, a_{22} \,/\, a_{22})}_{singl\, a_2} \cdot \underbrace{(\alpha_{21} \,/\, \alpha_{22} \,/\, \alpha_{23})}_{y_{H2}} = (a_{22}\alpha_{21} \,/\, a_{22}\alpha_{22} \,/\, a_{22}\alpha_{23}),$$

откуда

$$\widetilde{R}_H = B_{1H} + B_{2H} = (e_1 \,/\, e_2 \,/\, e_3) = \left(\underbrace{a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21}}_{e_1} \Big/ \underbrace{a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22}}_{e_2} \Big/ \underbrace{a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23}}_{e_3} \right).$$

Из определения треугольного нечеткого числа следует, что для него должно выполняться неравенство:

$$e_1 < e_2 < e_3, \tag{14}$$

поэтому:

$$a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} < a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} < a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23}.$$

В результате простейших преобразований получим:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \geq \dfrac{\Delta_2'}{\Delta_1'} \\ \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \geq \dfrac{\Delta_2''}{\Delta_1''}, \end{cases} \tag{15}$$

где $\alpha_{22} - \alpha_{21} = \Delta_2'; \alpha_{12} - \alpha_{11} = \Delta_1'; \alpha_{23} - \alpha_{22} = \Delta_2''; \alpha_{13} - \alpha_{12} = \Delta_1''; \Delta_1' + \Delta_1'' =$ $= supp\ y_{H1}; \Delta_2' + \Delta_2'' = supp\ y_{H2}$. Например, пусть $a_{12} = a_{22} = 1; \Delta_1' = \Delta_1'' = 2; \Delta_2' = \Delta_2'' = 1$; тогда$1 \geq 0.5; 1 \geq 0.5$ неравенства (15) выполняются, поэтому приведенные соотношения характеризуют нечеткую «сильную» оценку $\widetilde{R}_H$, т.к. при этом справедливо (14).

В противном случае, например,$a_{12} = a_{22} = 1; \Delta_1' = \Delta_1'' = 2$ из (15) получим: 1≥2, т.е. неравенство не выполняется. Этому будет соответствовать в (14) $e_2 < e_1$ или $e_3 < e_2$, что противоречит определению треугольного нечеткого числа. После соответствующих замен в (14) $e_1 \to e_2$ или $e_3 \to e_2$ получим $(e_2 \,/\, e_2 \,/\, e_3)$ или $(e_1 \,/\, e_2 \,/\, e_2)$, которые характеризуют нечеткую «слабую» оценку $\widetilde{R}_H$.

Результаты, полученные выше, легко обобщаются на случаи N=3, 4 и т.д. и значительным числом условий несмещенности.

Выводы

1. Разработана нечеткая модель ошибок, которая появляется при измерении выхода объекта, ошибках модельной зависимости и алгоритме оценивания.

2. Сформулирована общая задача по нечеткому минимаксному оцениванию в виде задачи нечеткого нелинейного программирования.

3. В отсутствии информации относительно элементов дисперсионной матрицы в общей модели ошибок производится редукция задачи нечеткого нелинейного программирования к задаче нечеткого линейного программирования.

4. Показано, что для нечеткого вероятностного пространства с метрикой Хаусдорфа, задача нечеткого линейного программирования легко модифицируется в задачу четкого линейного программирования.

5. Рассмотрен простейший пример синтеза «сильного/слабого» нечеткого минимаксного алгоритма оценивания.

Список литературы

1. Баосшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.С. Определение и коррекция движения (гарантирующий подход). М., Наука, 1980, 360 с.
2. Мочалов И.А. и др. Нечеткие вероятностно-статистические методы. Информационные технологии №4, 2003, Приложение.
3. Эльясберг П.С. Измерительная информация: сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? М., Наука, 1983, 208 с.
4. Эльясберг П.С. Определение движения по результатам измерений. М., Наука, 1976, 416 с.
5. A. Kandel, W.J. Byatt. Fuzzy process. Fuzzy sets and systems, №4(1980), 117-152.
6. J.J. Buckley, J. Feuring. Fuzzy differential quations, 110(2000), 43-54.
7. M. Friedman, M. Ming, A. Kandel. Fuzzy linear systems. Fuzzy sets and systems, 96(1998), 201-209.
8. Roy Goetschel, William Voxman. Elementary fuzzy calculas. Fuzzy sets and systems, 18(1986), 31-43.

Рецензенты:

Девеев А.И., д.т.н., профессор, зав. сектором вычислительного Центра Российской Академии наук (ВЦ РАН) им.А.А. Дородницына, г. Москва;

Воронов Е.М., д.т.н., профессор, государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва.