**УДК 004.3**

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЧЕТКИХ СЛУЧАЙНЫХ ДАННЫХ

**Мочалов И.А., Хрисат М.С.**

*Кафедра кибернетики и мехатроники Российский университет дружбы народов, Москва, email: mohd.khrisat@fet.edu.jo*

**Актуальной проблемой является лечение гибридных данных сглаживания (фильтрации) из случайной составляющей и находя полученная функция принадлежности. Чтобы решить эту проблему, мы используем метод наименьших квадратов (МНК).**
**Одна модель представляет собой сочетание неопределенности в ее нечеткости и случайности. Это приводит к нечеткой случайных величин. Наиболее распространенным гибрид данных, когда вектор является условная плотность экспериментальных данных с неясными параметрами. Например, одномерный нечеткой случайная величина $y_H$ имеет нормальную плотность с нечеткой ожидания и нечеткой стандартного отклонения или в символической форме, $x_H \approx N(r_E(y), r_\delta(y))$ где N-символ "нормальность" - определенные аксессуары функционируют.**
**в своей работе мы объяснить проблему и цели в одной секции, а в другом разделе мы объяснить способ решить проблему, и мы добавим два пример, чтобы объяснить проблему и как ее решить**

Ключевые слова: метод наименьших квадратов метод, гибридные данные, случайность, неопределенность.

## IDENTIFICATION PARAMETERS OF FUZZY RANDOM DATA

**Mochalov I.A., Khrisat M.S.**

*Department of Cybernetics and Mechatronics Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, email: mohd.khrisat @ fet.edu.jo*

**The actual problem is the treatment of hybrid data smoothing (filtering) of the random component and finding the resulting function accessories. To solve this problem, we use least squares method (LSM).**
**One model is a combination of uncertainty in her fuzziness and randomness. This results in a fuzzy random variables. The most common hybrid data when the vector is the conditional density of the experimental data with unclear parameters. For example, a one-dimensional fuzzy random variable $y_H$ has a normal density with fuzzy expectation and fuzzy standard deviation or in symbolic form, $x_H \approx N(r_E(y), r_\delta(y))$ where the N- symbol "normality" - defined function accessories.**
**In our work we explain the problem and the objective in one section and in the other section we explain the method to solve the problem and we add two example to explain the problem and how to solve it**

Key word: least squares method, hybrid data, randomness, uncertainty

Одной из моделей неопределенности является сочетание в ней нечеткости и случайности. Это приводит к появлению нечетких случайных переменных. Наиболее часто встречаются гибридные данные, когда вектор условной плотности экспериментальных данных имеет нечеткие параметры. Например, одномерная нечеткая случайная переменная $y_H$ имеет нормальную плотность с нечетким математическим ожиданием $E\ y_H = r_E(y), y \in R_1$ и нечетким средним квадратическим отклонением $\delta_{y_H} = r_\delta(y)$ или в символической форме $x_H \approx N(r_E(y), r_\delta(y))$ , где N- символ «нормальности» $r_E(\cdot), r_\delta(\cdot)$ ,- заданные функции принадлежностей.

Актуальной задачей обработки гибридных данных является сглаживание (фильтрации) случайной составляющей и нахождении результирующей функции принадлежностей. Для решения этой задачи будем использовать метод наименьших квадратов (МНК).

**Постановка Задачи**

Имеем вектор $Y_H^\tau = (y_{1H}, y_{2H}, ..., y_{nH})$ «гибридных» данных, « Н » - индекс нечеткости. Необходимо сгладить их методом наименьших квадратов (МНК). Предполагается, что выполнены следующие условия. Данные $y_{iH}, i = \overline{1,m}$ Связаны линейной моделью:

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(t) + e_H(t), t \in [0;T] \in R_1,$$

где $e_H(t)$-нечеткая случайная переменная с симметричной плотностью и параметрами: $Ee_H(0) = 0; De_H(t) = \delta^2 \cdot I, I$ -единичная матрица, $\delta^2$ - заданная четкая константа; нечеткость $e_H(t)$ задается с помощью функции принадлежностей $r(e_H)$ треугольного типа с параметрами $corer(\cdot) = 0, \sup r(\cdot) = \delta, f_i(t), i = \overline{1,n}$ - заданные базисные функции модели; $x_i, i = \overline{1,n}$ - неизвестные параметры модели, подлежащие определению по "m" измерениям: $Y_H^\tau = (y_H(t_1), y_H(t_2), ..., y_H(t_m)) = (y_{1H}, y_{2H}, ..., y_{mH})$, которые получены в моменты времени $t: t_1; t_2, ..., t_m; m \rangle n$ - число измерений "n" больше числа "m" неизвестных параметров модели.

**Метод Решения**

В соответствии с МНК вектор оценок $\hat{X}$ находится из условия $\min\limits_X e_H^\tau \cdot e_H = \min\limits_X (Y_H - FX)^\tau (Y_H - FX) = \min\limits_X \left\| Y_H - FX \right\|_{E_n}^2$, где $F = (f_i(t_j))_{(m \times n)}$ - прямоугольная матрица; $X^\tau = (x_1; x_2; ...; x_n)$ – вектор параметров модели, подлежащий определению. Для минимизации квадратичной формы $e^\tau \cdot e$ использует преобразования, связанные с алгеброй матриц, тогда получим нечеткую линейную систему (НЛС) относительно вектора X

$$A \cdot X = u_H$$

где $A = (f_i, f_j), i, l = n$ - квадратная матрица с $\dim A = (n \times n)$ из элементов скалярных произведений заданных базисных функций $f_i$ и $f_j$ в $E_n$. Очевидно, что элементы матрицы являются четкими переменными. Вектор $u_H^\tau = ((f_1, Y_H), (f_2, Y_H), ..., (f_n, Y_H)) = (u_{1H}, u_{1H}, ..., u_{nH})$ является вектором нечетких переменных.

Полученная НЛС решается в соответствии с методикой изложенной в [2]. В результате находится вектор нечетких оценок $\hat{X}_H^\tau = (\hat{x}_{1H}, \hat{x}_{2H}, ..., \hat{x}_{nH})$, который может быть «сильным» или «слабым». Здесь под "сильным" $\hat{X}_H$ подразумевается вектор, для которого все нечеткие компоненты $\hat{x}_{iH}$:

$$\hat{x}_{iH} \equiv \hat{x}_i(r) = (\underline{x}_i(r), x_i(r) \ / r \in [0;1], i = \overline{1,n}$$

удовлетворяют условиям:

i. $\overline{x}_i(r)$-монотонно убывающая функция ;

ii. $\underline{x}_i(r)$ – Монотонно возрастающая функция;

iii. $\overline{x}_i(r) \geq \underline{x}_i(r)$

Если хотя бы для одной из компонент $\hat{X}_H$ нарушается одно из условий (i)÷(iii), то после соответствующей замены переменных, при которой уже выполняются упомянутые соотношения, тогда нечеткий вектор $\hat{X}_H$ принято называть "слабым"[1].

Нечеткая оценка модели будет равна:

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{iH} \cdot f_i(t).$$

Как и ранее она может быть либо "сильной", либо "слабой". Если все $\hat{x}_{iH}, i = \overline{1,n}$ являются «сильными», то $\hat{y}_H(t)$ - сильная модель. Если хотя бы одна из $\hat{x}_{iH}$ является слабой, то $\hat{y}_H(t)$ - «слабая» модель.

**Пример 1**.

Имеем модель:

$$y_H(t) = x_i f_1(t) + e_H(t)\Big|_{f_1 \equiv 1} = x_i \cdot 1 + e_H(t), t \in [0, T = 3]$$

где $f_1(t) \equiv 1$- базисная функция модели; $e_H(t)$- нечеткая случайная переменная, распределенная по равномерному закону на промежутке $\Delta = [a = -0.5; b = 0.5]$ с функцией принадлежности $r(e_H), r \in [0;1]$ типа равнобедренного треугольника с параметрами $corer(e_H) = 0; \sup r(e_H) = \delta, \delta^2$ -дисперсия равномерного распределения: $\delta^2 = (b-a)^2 \big/ 12 \cong 0.08; \delta \cong 0.3$, тогда: $r(e_H) = \underline{r} = (2\delta^{-1})e_H + 1; \overline{r} = -(2\delta^{-1})e_H + 1 \ \ / r \in [0;1])$

или в эквивалентной уровневой форме:

$e_H = (\underline{e}(r) = 0.5\delta(r-1); \overline{e}(r) = 0.5\delta(r-1) \ \ / r \in [0;1])$

Пусть в результате генерации одной из реализаций равномерного закона на Δ было получено: $e_1 = -0.1; e_2 = 0.15; e_3 = 0.15; e_4 = 0.1,$ тогда нечеткие случайные переменные будут соответственно равны:

$e_{iH} = e_H + e_i, i = \overline{1,4}$

В итоге получим вектор $Y_H$ «гибридных» данных

$Y_H^{\tau} = (y_{1H}, y_{2H}, y_{3H}, y_{4H})$,

где $y_{iH} = (y_0 + e_{iH})\Big|_{y_0 = 1}, i = \overline{1,4}$

Далее для "m=4"измерений имеем:

$$A = f_i, f_j\Big|_{i,j=1} = (1,1) = \sum_{i=1}^{m} 1\cdot 1 = m\Big|_{m=4} = 4;$$

$$u_H^{\tau} = (f_1, Y_H),\ldots,(f_n, Y_H)\Bigg|_{\substack{f_1=1\\ f_2=\ldots f_n=0}} = \sum_{i=1}^{4} 1\cdot y_{iH}$$

В результате получим НЛС:

$A\cdot x_1 = u_H\Big|_{A=4} \Rightarrow \underbrace{4}_{A}\cdot x_1 = \sum_{i=1}^{3} 1\cdot y_{iH} \Rightarrow \det A = 4 \neq 0$ , поэтому НЛС невырождена. Расширенная НЛС будет иметь вид:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ -\overline{x}_1 \end{pmatrix}}_{x_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} \underline{y}_i \\ -\sum_{i=1}^{4} \overline{y}_i \end{pmatrix}}_{u_H}; \det s = 16 \neq 0$$

Поэтому

$$\hat{x}_{1H} = S^{-1}u_H \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ -\overline{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} \underline{y}_i \\ -\sum_{i=1}^{4} \overline{y}_i \end{pmatrix} \Rightarrow \ \hat{x}_{1H} = \left(\underline{x}_1(r) = 0.25\sum_{i=1}^{4} \underline{y}_i, \overline{x}_1(r) = 0.25\sum_{i=1}^{4} \overline{y}_i \quad / r\in[0;1]\right)\Bigg|_{\substack{\underline{y}_i(r)\\ \overline{y}_i(r)}} \Rightarrow$$

$\hat{x}_{1H} = \left(\underline{x}_1(r) = 1 + 0.5\delta(r-1); \overline{x}_1(r) = 1 - 0.5\delta(r-1) \quad / r\in[0;1]\right)$ нечеткая «сильная» оценка, т.е. относительно $\underline{x}_1(r)$, $\overline{x}_1(r)$ выполнены условия (i)÷(iii) Нечеткая «сильная» оценка модели равна:

$$\hat{y}_H(t_i) = \hat{x}_{1H}\, f(t_i)\Big|_{f\equiv 1} = \hat{x}_{1H}$$

Задавая $y_{iH}(\alpha), i = \overline{1,4}$ как некую функцию векторного параметра "α"можно получить «слабую» оценку $\hat{x}_{1H}$ и $\hat{y}_H(t_i)$ .

**Пример 2**.

Имеем модель: $y_{\text{H}}(t) = x_{1\text{H}}\cdot 1 + x_{2\text{H}}\cdot t + e_{\text{H}}(t)$. Здесь $f_1(t) = 1, f_2(t)$ - базисные функции $(n = 2)$. Получены нечеткие случайные данные (m=3):

$$\text{т}_1\cdot 0_1\!: \Big(t_1 = -1; y_{1\text{H}} = \big(\underline{y}_1 = r; \overline{y}_1 = 2 - r \quad / r\in[0;1]\big)\Big);$$

$$\text{т}_2\cdot 0_2\!: \Big(t_2 = 0; y_{2\text{H}} = \big(\underline{y}_2 = 0; \overline{y}_2 = 0 \quad / r\in[0;1]\big)\Big);$$

$$\text{т}_3\cdot 0_3\!: \Big(t_3 = 1; y_{3\text{H}} = \big(\underline{y}_3 = r; \overline{y}_3 = (\beta - 1) - \beta\cdot r \quad / r\in[0;1]\big)\Big), \beta > 0.$$

Вычисления дают:

$$(f_1, f_1) = \sum_{i=1}^{3} 1\cdot 1 = 3; (f_1, f_2) = (f_2, f_1) = \sum_{i=1}^{3} 1\cdot t_i = 0; (f_2, f_2) = \sum_{i=1}^{3} t_i^2 = 2;$$

$$(f_1, Y_\text{Н}) = \sum_{i=1}^{3} 1 \cdot y_{i\text{Н}} = \underbrace{(y_{1\text{Н}} + y_{3\text{Н}})}_{U_{i\text{Н}}} = u_{1\text{Н}} =$$

$$= \left(\underline{u}_1(r) = 2 \cdot r; \overline{u}_1(r) = (\beta + 3) - (\beta + 1)r \quad /r \in [0; 1]\right);$$

$(f_2, Y_\text{Н}) = \sum_{i=1}^{3} t_i y_{i\text{Н}} = \underbrace{(-y_{1\text{Н}} + y_{3\text{Н}})}_{U_{2\text{Н}}} = u_{2\text{Н}} = \left(\underline{u}_2(r) = 0; \overline{u}_2(r) = (\beta - 1) - (\beta - \right.$

$\left. -1)r \quad /r \in [0; 1]\right)$.

В результате получим:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{1\text{Н}} \\ x_{2\text{Н}} \end{pmatrix}}_{X_\text{Н}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1\text{Н}} = (f_1, Y_\text{Н}) \\ u_{2\text{Н}} = (f_2, Y_\text{Н}) \end{pmatrix}}_{U_\text{Н}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot x_{1\text{Н}} + 0 \cdot x_{2\text{Н}} = u_{1\text{Н}} \\ 0 \cdot x_{1\text{Н}} + 2 \cdot x_{2\text{Н}} = u_{2\text{Н}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{1\text{Н}} = u_{1\text{Н}}/3 = \left(\underline{x}_1(r) = \frac{2}{3} r; \overline{x}_1(r) = \frac{\beta + 3}{3} - \frac{(\beta + 1)}{3} \cdot r \quad /r \in [0; 1]\right);$$

$\hat{x}_{2\text{Н}} = u_{2\text{Н}}/2 = \left(\underline{x}_2(r) = 0; \overline{x}_2(r) = \frac{(\beta-1)}{2} - \frac{(\beta-1)}{2} r \quad /r \in [0; 1]\right)$.

Оценка $\hat{x}_{i\text{Н}}, i = 1,2$ является «сильной», если компоненты $\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)$ удовлетворяют условиям:

(i) $\overline{x}_i(r)$ - монотонно убывающая (↓)

(ii) $\underline{x}_i(r)$ - монотонно возрастающая (↑)

(iii) $\overline{x}_i(r) \geq \underline{x}_i(r), \forall r \in [0; 1]$.

Для $\hat{x}_{1\text{Н}}(r)$имеем: $\underline{x}_1(r) \uparrow; \overline{x}_1(r) \downarrow, x_{1\text{Н}}(r = 1) = x_1 = 2/3; \overline{x}_1(r = 0) = 1 + \beta/3$, поэтому при $\forall \beta > 0, r = 0 \Rightarrow 1 + \beta/3 > 2/3 \Leftrightarrow \overline{x}_1(r = 0) > x_1$ , т.е справедливо (iii). Это означает, что $\hat{x}_{1\text{Н}}$ является «сильной» оценкой при $\forall \beta$ .

Аналогичные вычисления для $\hat{x}_{2\text{Н}}$ дают, что при $\beta \geq 1$ оценка $\hat{x}_{2\text{Н}}$ является «сильной», а при $0 < \beta < 1$ она является «слабой». Это означает, что в зависимости от величины параметра "$\beta$" нечеткая оценка модели $y_\text{Н}(t)$ может быть либо «сильной», либо «слабой».

**ВЫВОДЫ**

1. Разработана методика решения нечеткой линейной системы, которая возникает при сглаживании «гибридных» данных по методу наименьших квадратов.
2. Моделируются «гибридные» данные для простейшей нечеткой линейной модели и показано, что она является «сильной» моделью.
3. Указано направление получения «слабой» модели нечеткого случайного процесса.

## Список литературы

1. Асмолова Ю. А., Мочалов И. А., Христич Д. В. Линейные нечеткие системы в управлении. Труды 9-го международ. симпозиума «INTEL’ 2010», г. Владимир, 2010, с. 178 – 182.
2. Мочалов И.Н. и др. Нечеткие вероятностно-статистические методы. Информационные технологии. Приложение, 2003.
3. Bernhard F. Arnold. Testing fuzzy hypotheses with crips data. Fuzzy sets and systems, 94 (1998), p.323.
4. Feng Y., Hu Z., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variable and their application. Fuzzy sets&systems, 120 (2001), 487 – 497.
5. Puri M. L., Ralescu D. A. Fuzzy random variables. Journal of mathematical analysis application, 4(1986), 409 – 422.

**Рецензенты:**

Девеев А.И., д.т.н., профессор, зав. сектором вычислительного Центра Российской Академии наук (ВЦ РАН) им. А.А. Дородницына, г. Москва.

Воронов Е.М., д.т.н., профессор, государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва.