

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СРЕДАХ: СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИОННОЙ ДЛИНЫ

Ветлужский А.Ю.<sup>1</sup>, Машанова Т.Д.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт физического материаловедения СО РАН, Улан-Удэ, e-mail: vay@ipms.bncnet.ru

Распространение волн через случайную среду было и продолжает быть предметом широкого исследования. Распространяясь через среду, состоящую из системы рассеивателей, волны будут неоднократно рассеиваться, формируя многократный процесс рассеивания. При определенных условиях многократное рассеивание приводит к локализации электромагнитных волн. В работе охарактеризовано два уровня явления локализации, выделено два основных критерия наступления локализации электромагнитных волн, такие как критерий Иоффер-Регеля и экспоненциально убывающий характер коэффициента прохождения волн через непоглощающую среду. Одним из основных параметров наступления локализации является локализационная длина. Локализационную длину в двумерных дискретных средах можно определить с помощью строгого численного моделирования и из аналитической теории. Наблюдается существенное несовпадение в результатах. При аналитическом описании процессов локализационное состояние выявляется в значительно меньшем частотном диапазоне.

Ключевые слова: локализация электромагнитных волн, случайная дискретная среда, длина свободного пробега, локализационная длина.

## LOCALIZATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A TWO-DIMENSIONAL DISCRETE MEDIA: A COMPARISON OF ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR DETERMINING THE LOCALIZATION LENGTH

Vetluzhsky A.Y.<sup>1</sup>, Mashanova T.D.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Federal State Institution of Science Institute of physical materials science of SB RAS, Ulan-Ude, e-mail: vay@ipms.bncnet.ru

Wave propagation through random medium was and continues to be the subject of extensive research. Propagating through a medium consisting of a system of lenses, the waves will often be scattered to form a multiple scattering process. Under certain conditions, multiple scattering leads to localization of electromagnetic waves. The work is characterized by two levels of localization, identified two main criteria onset localization of electromagnetic waves, such as Ioffer-Regel criterion and exponentially decreasing character of the coefficient of wave propagation through non-absorbing medium. One of the main parameters of the onset of localization is a localization length. The localization length in two-dimensional discrete media can be determined by rigorous numerical simulation and analysis of the theory. There is a significant difference in the results. In the analytic description of the processes of localization condition is detected in a much smaller frequency range.

Key words: localization of electromagnetic waves, random discrete medium, mean free path, localization length.

Распространение электромагнитных волн в случайных дискретных средах сопровождается рядом эффектов. Одним из наиболее исследуемых в течение двух последних десятилетий является сильная локализация излучения. Изначально концепция данного эффекта была предложена Андерсоном [3] в середине прошлого века применительно к описанию диффузии электронов в кристаллических решетках в случайном потенциале. Начиная с 1980-х годов понятие «локализация» начинает использоваться для описания эффектов, сопровождающих распространение электромагнитных (классических) волн в случайных дискретных средах.

Явление локализации может быть охарактеризовано двумя уровнями. Первый - это слабая локализация или усиление обратного рассеяния, связанное с взаимной когерентностью волн,

многократно рассеянных на одних и тех же элементах среды при распространении во взаимно противоположных направлениях. Второй - сильная локализация (далее локализация) - полное подавление распространения волн в сильно рассеивающей среде [1,4].

На сегодняшний день существуют два основных критерия наступления локализации электромагнитных волн:

1. Коэффициент прохождения волн через не поглощающую структуру приобретает экспоненциально убывающий характер, описываемый законом  $T \approx \exp(-L/l_{loc})$ , где  $L$  – линейная протяженность среды,  $l_{loc}$  – локализационная длина, являющаяся параметром, определяющим степень локализации излучения.

2. Критерий Иоффе – Регеля:  $k l \leq 1$ , где  $k$  – волновое число,  $l$  – длина свободного пробега электромагнитной волны.

$$l = l_0 / \sigma \cdot n, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – поперечник рассеяния элементов среды,  $n$  – концентрация (количество элементов на единицу площади).

Теоретические исследования локализации волн в различных средах ведутся либо на основе строгих численных методов, либо приближенно, исходя из теории эффективной среды. В последнем случае становится возможным описать основные локализационные параметры достаточно простыми аналитическими выражениями. Для выявления локализационных состояний при численном моделировании процесса распространения  $l_{loc}$  должна быть меньше линейных размеров исследуемой случайной структуры. При этом для получения малых значений удобно рассматривать локализационные эффекты в сильно рассеивающих средах. Такая ситуация возможна при рассмотрении резонансных случаев, например, обусловленных резонансами Ми для частиц, образующих дискретную структуру. Альтернативой может служить анализ систем, в которых рассеиватели имеют значительно больший показатель преломления, чем окружающая их однородная среда заполнения.

Целью данной работы является сравнительный анализ двух методик определения локализационной длины: на основе строгого численного метода и аналитического подхода.

### **Численное моделирование процесса.**

Исследуемая структура представляла собой  $N$  круговых цилиндров радиуса  $a=0,05$  мм, размещенных случайно и параллельно друг другу в однородной среде в пределах прямоугольной площадки длиной  $L=12$  мм и шириной  $W = 90$  мм, со средней плотностью  $\rho = 0.5$  мм<sup>-2</sup>. Структура возбуждалась полем линейного электрического тока, ориентированного параллельно цилиндрам, таким образом, рассматривался случай  $E$  поляризации волн (рис. 1).

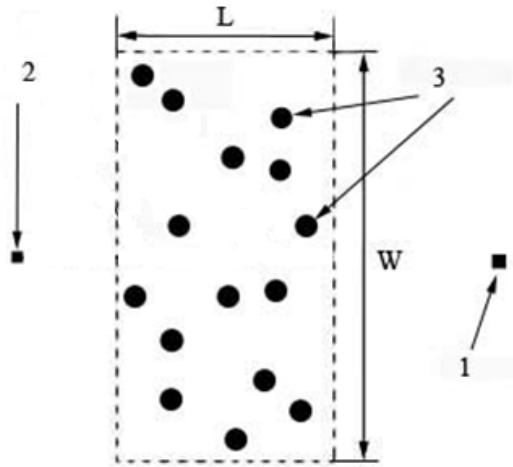


Рис.1. Концептуальная схема рассматриваемой в работе системы. 1 – источник поля, 2 – место расположение приемника излучения, 3 – цилиндрические рассеиватели.

Численное моделирование проводилось на основе теории многократного рассеяния [5]. Методика расчетов применительно к задачам рассеяния волн на системах цилиндрических элементов подробно обсуждалась в [2]. Кратко суть ее сводится к следующему.

Поле в присутствии системы параллельных цилиндров может быть представлено в виде:

$$A_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = A_z^i + A_z^{\hat{a}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ C H_m^{(1)}(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|) J_m(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) e^{-im(\varphi_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j} - \varphi_{\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_0})} + \sum_{j=1}^N B_{m j} H_m^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) e^{-im\varphi_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}} \right\} \quad (2)$$

где первое слагаемое описывает поле прямой волны, второе – поле, рассеянное на цилиндрах;  $H_m^{(1)}$  - функция Ханкеля первого рода  $m$ -ого порядка,  $J_m$  - функция Бесселя  $m$ -ого порядка; волновое число  $k = \frac{2\pi}{c} f$ , где  $c$  - скорость света,  $f$  - частота;  $r_0$ ,  $r$ ,  $r_j$  - радиус-векторы, определяющие положение источника, приемника поля и произвольного  $j$ -го цилиндра соответственно;  $\varphi$  - азимутальные углы, образованные указанными векторами и осью  $x$  декартовой системы координат;  $C$  - коэффициент, описывающий амплитуду падающей волны,  $B_{m j}$  - коэффициенты, определяющие амплитуду возбуждения  $j$ -го цилиндра под действием поля прямой волны и волн, рассеянных на других элементах структуры (рис. 2).

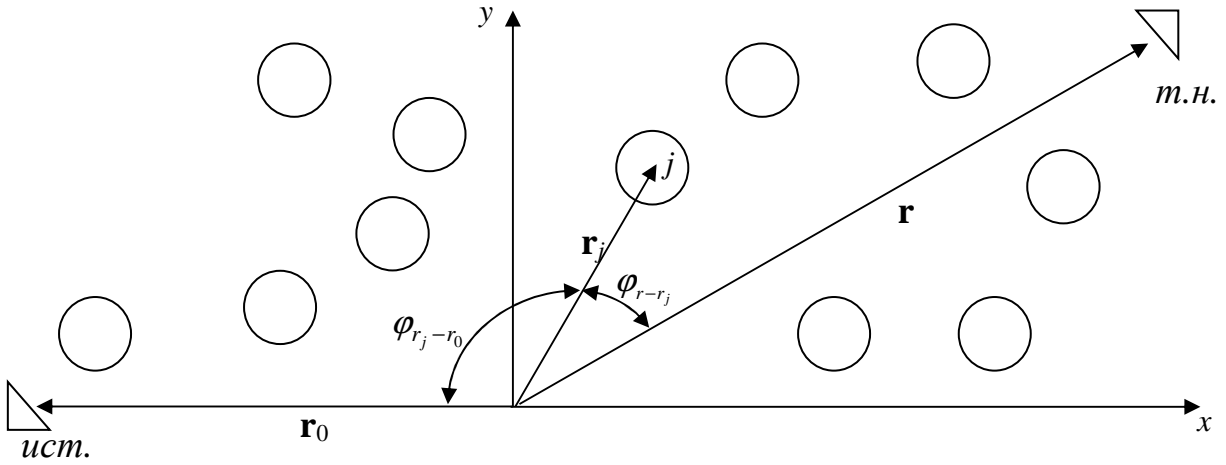


Рис. 2. Иллюстрация аргументов функций в формулах (2) и (3).

Для нахождения неизвестных коэффициентов необходимо удовлетворить граничным условиям на поверхности цилиндров. Для этого при формулировке данных условий на одном из элементов, волновые функции в дифракционных рядах, описывающих поля, рассеянные на остальных цилиндрах, с использованием теоремы сложения выражаются через собственные волновые функции рассматриваемого элемента. В результате выражение (2) приводится к виду:

$$A_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = A_z^i + A_z^a = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ C H_m^{(1)}(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|) J_m(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) e^{-im(\varphi_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j} - \varphi_{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0})} + B_{mj} H_m^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|) e^{-im\varphi_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}} + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_{mf} H_{m-s}^{(1)}(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_f|) J_m(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|) e^{-i(m-s)\varphi_{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_f}} \right\} \quad (3)$$

Последовательно удовлетворяя граничным условиям на поверхности каждого рассеивателя, получаем систему  $N$  линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $B_m$ , которую решаем стандартными методами, определяя тем самым поле в присутствии двумерной системы случайно расположенных элементов. В ходе численного моделирования определялись значения полной  $I = \langle |A_z|^2 \rangle$  и когерентной  $I_{coh} = \langle A_z \rangle^2$  интенсивностей излучения, нормированные интенсивностью поля в отсутствие структуры  $I_0 = |A_z^n|^2$ , а также коэффициент прохождения волн сквозь структуру  $\hat{O} = I/I_0$ . Знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по реализациям расположений элементов, число которых определялось сходимостью результатов расчетов и варьировалось от 500 до 1000.

После вычисления вышеуказанных величин длина локализации волн в рассматриваемой системе определяется как:

$$l_{loc} = -L / \langle \ln |T|^2 \rangle \quad (4).$$

### Аналитическое описание.

Анализ процесса рассеяния в рассматриваемых средах может базироваться на аналогии между распространением электромагнитной волны в дискретной среде и диффузионным движением носителей заряда в твердом теле. В этом случае состояние локализации может характеризоваться отсутствием диффузионного движения волновых процессов. При этом дискретная случайная среда может рассматриваться как сплошная, процесс распространения волн в которой характеризуется эффективным волновым числом  $k_{eff}$ .

$$k_{eff} = k + \sqrt{\frac{2\pi}{ik}} \rho f(0), \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность расположения элементов,  $f(0)$  – функция рассеяния в направлении вперед одиночного цилиндра [5].

При этом длина свободного пробега волны будет вычисляться по формуле:

$$l = 1/2 \text{Im}(k_{eff}). \quad (6)$$

Тогда локализационная длина может быть определена как:

$$l_{loc} = l \exp[\pi/2 * \text{Re}(k_{eff}) * l] \quad (7)$$

где  $l$  вычисляется из формулы (6).

### Сравнение результатов и их обсуждение.

В ходе расчетов было установлено, что качественно результаты, полученные строгим и приближенным методами, совпадают (рис 3).

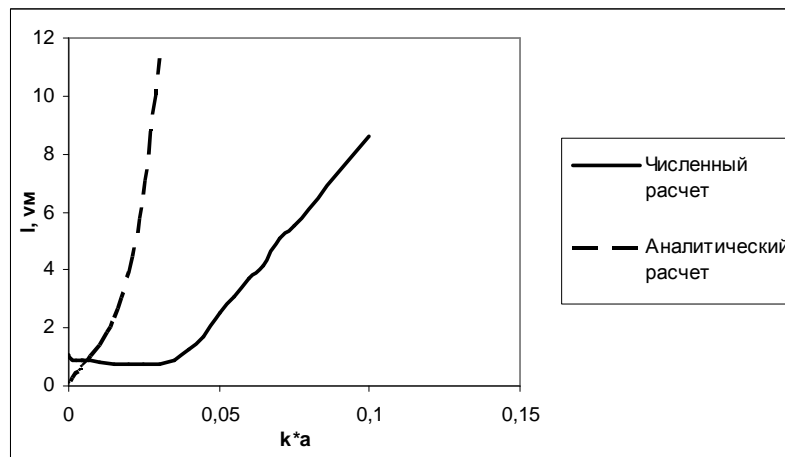


Рис. 3. Зависимость локализационной длины от  $k \cdot a$  (при изменении частоты)

Однако, если численное моделирование позволяет определить частотные границы локализации в пределах  $ka = 0 \div 0,03$ , то аналитическое описание процессов приводит к выявлению локализационных состояний в значительно меньшем частотном диапазоне. Таким образом, корректная оценка локализационной длины возможна только на основе строгого описания распространения волн в случайной среде.

## Список литературы

1. А.Ю. Ветлужский. Локализация излучения в двумерной случайной среде конечной протяженности// ЖЭТФ. 2009. Т.136. № 2. С. 356-361.
2. Иванов Е.И. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
3. Anderson P.W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. P. 1492–1505.
4. Asatryan A.A., Robinson P.A. Diffusion and anomalous diffusion of light in two-dimensional photonic crystals // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. 036605.
5. Twersky V. Multiple Scattering of Waves and Optical Phenomena // J. Opt. Soc. Am. 1962. Vol.52. P. 145-169.

### Рецензенты:

Сандитов Д.С., д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВПО Бурятский Государственный Университет, г. Улан-Удэ;

Цыдыпов Ш.Б., д.т.н., доцент, заведующий кафедрой Общей Физики, ФГБОУ ВПО Бурятский Государственный Университет, г. Улан-Удэ.