УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО РОДА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Абрегов М.Х.[1], Бечелова А.Р.[1], Водахова В.А.[1]

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

При решении краевых задач для нагруженного оператора Штурма—Лиувилля появляется необходимость повышения порядка точности применяемого конечно-разностного метода. Данная работа посвящена численному методу повышенного порядка точности решения краевой задачи второго рода для нагруженного оператора Штурма—Лиувилля. В работе приведены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Нагруженные дифференциальные уравнения возникают при моделировании различных физических и биологических процессов, в частности при изучении движения почвенной влаги, задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из точечных источников загрязняющее вещество определенной интенсивности, задаче теплопроводности. В классе достаточно гладких коэффициентов доказана сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в равномерной метрике с четвертым порядком точности по шагу сетки. Основным методом исследования задачи является принцип максимума. С помощью принципа максимума получены априорные оценки погрешности приближенного решения в равномерной метрике, откуда следует ее сходимость к точному решению задачи.

Ключевые слова: вторая краевая задача для нагруженного оператора Штурма—Лиувилля; однозначная разрешимость; численный метод решения повышенного порядка; равномерная оценка

NUMERICAL METHODS OF SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS THE SECOND KIND OF HIGHER ORDER ACCURACY FOR LOADED STURM-LIOUVILLE

Abregov M.H.[1], Bechelova A.R.[1], Vodahova V.A.[1]

[1] *«Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov» Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

In solving boundary value problems for a loaded Sturm—Liouville appears the need to improve order accuracy used finite-difference method. This work is devoted to the numerical method of high order boundary problem solution of the second kind for a loaded Sturm—Liouville operator. The paper presents necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem. Loaded differential equations arise when modeling a variety of physical and biological processes, in particular in the study of movement of soil moisture, quality control problems of water when the water body flows out of point sources of contaminant certain intensity, heat conduction problem. In the class of sufficiently smooth coefficients proved convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem in the uniform metric to the fourth order of accuracy in pitch grid. The basic method of investigation of the problem is the principle of maximum. With the help of the maximum principle, a priori estimates of approximate solutions in the uniform metric, which implies its convergence to the exact solution of the problem.

Keywords: second boundary value problem for a loaded Sturm—Liouville operator; a unique solution; numerical method for solving high-order; uniform estimate

В работе рассматривается численный метод решения краевой задачи

$$u'' - g(x)u + m(x)u(\xi) = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \tag{2}$$

где ξ — фиксированная точка интервала $(0,1)$.

Эта задача в более общей постановке изучалась в работе $[2]$, где были установлены необходимые и достаточные условия ее разрешимости и был разработан численный метод нахождения ее приближенного решения. Из полученной равномерной оценки погрешности этого решения следует его сходимость к точному решению (1)-(2) со скоростью $O(h^2)$, где h – шаг равномерной сетки, на которой строится соответствующая конечно-разностная схема. Когда $m(x)$ принимает положительные значения, может наблюдаться неустойчивость решения дифференциальной задачи (1), (2). Например, это происходит при $m(x)$ и $g(x)$, принимающих близкие значения на отрезке $[0,1]$. При условии $m(x)-g(x)=O(h^{\lambda})$ погрешность приближенного решения оказывается величиной порядка $O(h^{2-\lambda})$, где $0<\lambda<2$.

Перейдем к изложению численного метода, который при определенных условиях гладкости на коэффициенты уравнения обеспечивает более высокий порядок точности решения.

Введем в рассмотрение функции $p(x)$ и $\upsilon(x)$, как решения дифференциальных задач

$$p''-g(x)p=-f(x), \qquad p'(0)=0, \qquad p'(1)=0, \tag{3}$$

$$\upsilon''-g(x)\upsilon=-m(x), \qquad \upsilon'(0)=0, \qquad \upsilon'(1)=0, \tag{4}$$

соответственно и приведем формулировки теорем, в которых даются необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть* $f(x), g(x), m(x)\in C[0,1]$, $0<G_0\le g(x)\le G_1$ *и выполнено условие*

$$1-\upsilon(\xi)\ne 0. \tag{5}$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима, и ее решение представляется в виде

$$u(x)=p(x)+\frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\cdot\upsilon(x). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x), g(x), m(x)\in C[0,1]$, $0<G_0\le g(x)\le G_1$ *и функция* $m(x)$ *такова, что для всех* $x\in[0,1]$

$$m(x)\ne g(x). \tag{7}$$

Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и принадлежит классу $C^{(2)}[0,1]$.

Эти теоремы доказаны в работах $[1]$, $[2]$. В дальнейшем будем считать, что выполнены условия В: $f(x)$, $g(x)$, $m(x)\in C^{(4)}[0,1]$, $0<G_0\le g(x)\le G_1$.

Имеет место

Теорема 3. *Если* $f(x), g(x), m(x)$ *удовлетворяют условию В и выполнено (5), то решение задачи (1), (2) принадлежит классу* $C^{(6)}[0,1]$.

Доказательство этой теоремы следует из однозначной разрешимости задач (3) и (4) в классе $C^{(6)}[0,1]$ при выполнении условий (В), и представления решения в виде (6).

Для численного решения задачи (1),(2) на отрезке $[0,1]$ введем равномерную сетку [5] $\omega_h=\{x_i=ih, \quad i=0,1,...,N; \quad hN=1\}$, где шаг сетки h выберем меньше половины меньшего из отрезков $[0,\xi], \quad [\xi,1]$. Номер k выберем из условия $kh\le\xi<(k+1)h$. Для сеточной функции y введем обозначение $y_{\bar{x}x}=\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$ и дифференциальную задачу (3) аппроксимируем конечно-разностной схемой,

$$P_{\bar{x}x}-gP-\frac{h^2}{12}(gP)_{\bar{x}x}=-f-\frac{h^2}{12}f_{\bar{x}x}, \quad i=\overline{1,N-1}, \tag{8}$$

$$\frac{P_1-P_0}{h}=\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)g_0+2g_{\frac{1}{2}}\right)P_0-\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)f_0+2f_{\frac{1}{2}}\right),$$

$$-\frac{P_N-P_{N-1}}{h}=\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)g_N+2g_{N-\frac{1}{2}}\right)P_N-\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)f_N+2f_{N-\frac{1}{2}}\right),$$

где

$$g_i=g(x_i),\ f_i=f(x_i),\ g_{\frac{1}{2}}=g\left(\frac{h}{2}\right),\ f_{\frac{1}{2}}=f\left(\frac{h}{2}\right),\ g_{N-\frac{1}{2}}=g\left(1-\frac{h}{2}\right),\ f_{N-\frac{1}{2}}=f\left(1-\frac{h}{2}\right),$$

а дифференциальную задачу (4) — конечно-разностной схемой

$$V_{\bar{x}x}-gV-\frac{h^2}{12}(gV)_{\bar{x}x}=-m-\frac{h^2}{12}m_{\bar{x}x}, \qquad i=\overline{1,N-1}, \tag{9}$$

$$\frac{V_1-V_0}{h}=\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)g_0+2g_{\frac{1}{2}}\right)V_0-\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)m_0+2m_{\frac{1}{2}}\right),$$

$$-\frac{V_N-V_{N-1}}{h}=\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)g_N+2g_{N-\frac{1}{2}}\right)V_N-\frac{h}{6}\left(\left(1+\frac{h^2}{4}\right)m_N+2m_{N-\frac{1}{2}}\right),$$

где $m_i=m(x_i), \quad m_{\frac{1}{2}}=m\left(\frac{h}{2}\right), \quad m_{N-\frac{1}{2}}=m\left(1-\frac{h}{2}\right).$

С помощью разложений по формуле Тейлора [3] нетрудно показать, что конечно-разностные схемы (8) и (9) аппроксимируют задачи (3) и (4) соответственно, с точностью $O(h^4)$.

Теперь получим аппроксимацию порядка $O(h^4)$ значения $\upsilon(\xi)$. С этой целью через точки $(x_{k-1},V_{k-1}),(x_k,V_k),(x_{k+1},V_{k+1})$ и (x_{k+2},V_{k+2}) проведем интерполяционный полином Лагранжа третьей степени [5]:

$$L_3(x;V) = L_3^0(x)V_{k-1} + L_3^1(x)V_k + L_3^2(x)V_{k+1} + L_3^3(x)V_{k+2}, \tag{10}$$

где коэффициенты Лагранжа вычисляются по формулам:

$$L_3^0(x) = -\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{6h^3}, \quad L_3^1(x) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{2h^3},$$

$$L_3^2(x) = -\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+2})}{2h^3}, \quad L_3^3(x) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})}{6h^3}. \tag{11}$$

Величину $l_k V = L_3(\xi;V)$ примем за приближенное значение $\upsilon(\xi)$ и оценим погрешность такой аппроксимации. Для этого проведем интерполяционный полином Лагранжа через точки $(x_{k-1},\upsilon_{k-1}),(x_k,\upsilon_k),(x_{k+1},\upsilon_{k+1})$ и (x_{k+2},υ_{k+2}). Он имеет вид:

$$L_3(x;\upsilon) = L_3^0(x)\upsilon_{k-1} + L_3^1(x)\upsilon_k + L_3^2(x)\upsilon_{k+1} + L_3^3(x)\upsilon_{k+2}, \tag{12}$$

где коэффициенты Лагранжа вычисляются по формулам (11). Так как функция $\upsilon(x)$ имеет четвертую производную на отрезке $[0,1]$, то, воспользовавшись, известной оценкой погрешности формулы Лагранжа $[5]$, получаем оценку:

$$|\upsilon(\xi) - L_3(\xi;\upsilon)| \le M_{4,\upsilon} \cdot h^4. \tag{13}$$

Так как $V_i - \upsilon_i = O(h^4)$, то разность $|L_3(x;V) - L_3(x;\upsilon)|$ является величиной $O(h^4)$. Следовательно, найдется положительная постоянная $M_{V,\xi}$ такая, что:

$$|\upsilon(\xi) - l_k V| \le M_{V,\xi} \cdot h^4. \tag{14}$$

По аналогии с аппроксимацией $\upsilon(\xi)$, значение $p(\xi)$ аппроксимируем величиной $l_k P$, равной значению в точке ξ интерполяционного полинома Лагранжа, проведенного через точки $(x_{k-1},P_{k-1}),(x_k,P_k),(x_{k+1},P_{k+1})$ и (x_{k+2},P_{k+2}), т.е.

$$l_k P = L_3(\xi;P) = L_3^0(\xi)P_{k-1} + L_3^1(\xi)P_k + L_3^2(\xi)P_{k+1} + L_3^3(\xi)P_{k+2}. \tag{15}$$

Очевидно, найдется положительная постоянная $M_{P,\xi}$, такая, что:

$$|p(\xi) - l_k P| \le M_{P,\xi} h^4. \tag{16}$$

В качестве приближенного решения задачи (1), (2) выберем сеточную функцию y

$$y_i = P_i + \frac{l_k P}{1 - l_k V} \cdot V_i, \quad i = \overline{0, N}. \tag{17}$$

Имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия B и (5). Тогда сеточная функция* y_i, *определенная по формуле (17), сходится при* $h \to 0$ *к решению* $u(x)$ *задачи (1), (2) со скоростью* $O(h^4)$ *в равномерной метрике.*

Доказательство. Пользуясь представлением (6) точного решения $u(x)$, получаем оценку погрешности $u-y$ в равномерной метрике:

$$\|u-y\|_{C(\omega_h)} \le \|p-P\|_{C(\omega_h)} + \frac{1}{|1-\upsilon(\xi)|}\cdot\|\upsilon-V\|_{C(\omega_h)}\cdot\|p\|_C + \frac{1}{|1-l_kV|}\cdot|p(\xi)-l_kP|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} +$$

$$+\frac{|\upsilon(\xi)-l_kV|}{|1-l_kV|\cdot|1-\upsilon(\xi)|}\cdot\|p\|_C\cdot\|V\|_{C(\omega_h)}. \tag{18}$$

Оценим слагаемые в правой части (18). Поскольку конечно-разностные схемы (8) и (9) сходятся к решениям дифференциальных задач (3) и (4) с порядком $O(h^4)$ соответственно, то найдутся положительные постоянные $M_{P,1}$ и $M_{V,1}$ не зависящие от h, что:

$$\|p-P\|_{C(\omega_h)} \le M_{P,1}h^4, \quad \|\upsilon-V\|_{C(\omega_h)} \le M_{V,1}h^4. \tag{19}$$

Условие $m(x)\ne g(x)$ означает, что либо $m(x)<g(x)$, либо $m(x)>g(x)$. Введем обозначение $\Delta_m=\min\limits_{[0,1]}|g(x)-m(x)|$. Оценим теперь снизу $|1-l_kV|$. Из (14) следует, что при $h^4\le\dfrac{\Delta_m}{2G_1\cdot M_{V,\xi}}$ имеет место оценка $|\upsilon(\xi)-l_kV|\le\dfrac{\Delta_m}{2G_1}$, откуда получаем:

$$1-\upsilon(\xi)-\frac{\Delta_m}{2G_1}\le 1-l_kV\le 1-\upsilon(\xi)+\frac{\Delta_m}{2G_1}. \tag{20}$$

Пусть $m(x)<g(x)$. Воспользовавшись оценкой $1-\upsilon(\xi)\ge\dfrac{\Delta_m}{G_1}$, полученной в $[2]$, из левой части (20) получаем: $1-l_kV\ge 1-\upsilon(\xi)-\dfrac{\Delta_m}{2G_1}\ge\dfrac{\Delta_m}{2G_1}$.

Пусть $m(x)>g(x)$. Так как в этом случае $1-\upsilon(\xi)\le-\dfrac{\Delta_m}{G_1}$, то из правой части (20) следует оценка $1-l_kV\le 1-\upsilon(\xi)+\dfrac{\Delta_m}{2G_1}\le-\dfrac{\Delta_m}{2G_1}$. Таким образом, найдется h_0, что при $h\le h_0$ имеет место оценка:

$$|1-l_kV|\ge\frac{\Delta_m}{2G_1}. \tag{21}$$

Решение p задачи (3) и решение V задачи (9) оцениваются соответственно в виде $[4]$:

$$\|p\|_C\le\frac{1}{g_0}\|f\|_C,\quad \|V\|_{C(\omega_h)}\le\frac{1}{g_0}\|m\|_C. \tag{22}$$

Применяя оценки (15), (16), (19), (21), (22) из (18), получаем:

$$\|u-y\|_{C(\omega_h)}=M_0\left(1+\frac{1}{\Delta_m}\cdot\frac{G_1}{G_0}\|f\|_C\right)\left(1+\frac{2}{\Delta_m}\cdot\frac{G_1}{G_0}\|m\|_C\right)h^4, \tag{23}$$

где $M_0 = \max(M_{P,1}; \quad M_{V,1}; \quad M_{P,\xi}; \quad M_{V,\xi})$.

Из (23) следует утверждение теоремы 4.

При $m(x) > 0$ может наблюдаться неустойчивость решения задачи (1), (2). В частности, если $m(x)$ близко к $g(x)$ во всех точках $x \in [0,1]$ настолько, что $m(x) - g(x) = O(h^{\lambda})$, где $0 < \lambda < 4$, то предложенный алгоритм позволяет вычислить решение задачи (1), (2) с точностью $O(h^{4-\lambda})$.

Список литературы

1. Абрегов М.Х., Бечелова А.Р. «Вторая краевая задача для нагруженного линейного дифференциального уравнения второго порядка». Журнал «Известия КБНЦ РАН», № 3(35), Нальчик, 2010.
2. Абрегов М.Х., Бечелова А.Р., Нахушева Ф.М. «Численный метод решения краевой задачи второго рода для нагруженного оператора Штурма-Лиувилля». Электронный научный журнал «Современные проблемы науки и образования», № 3, 2015.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1982.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М.Х, д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН «Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН», г. Нальчик.

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор Высокогорного Геофизического Института, г. Нальчик.