

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ВИДЕОИЗОБРАЖЕНИЙ ОТДЕЛЬНЫХ СВЕТЯЩИХСЯ ТОЧЕК В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Мешков С.С., Бабинович А.И., Пахотин В.А.

Балтийский федеральный университет имени И. Канта; ss89@list.ru

Рассмотрены возможности цифровой обработки видеозображений светящихся точек в оптических системах. Основой метода обработки являются положения теории оптимального приема в приложении к совокупности дифракционных максимумов, содержащих информацию о точечных источниках света. Для решения задачи разрешения отдельных светящихся точек используется функционал правдоподобия, преобразованный с помощью уравнений правдоподобия. Приведены основы теории оптимального приема; уточнена терминология, связанная с определением сигнала и функции правдоподобия. Из функции правдоподобия выведены выражения, определяющие оптимальный алгоритм обработки. Выводятся выражения для оценки дисперсии параметров сигналов, и оценивается рабочая область метода обработки. На основании минимума функционала правдоподобия введен критерий качества решения. Представлены результаты модельных исследований в сравнении с оценкой параметров сигналов по дифракционным максимумам светящихся точек.

Ключевые слова: оптимальный прием; функционал правдоподобия; отдельные светящиеся точки.

DIGITAL PROCESSING OF IMAGE AND VIDEO OF SEPARATE LUMINOUS POINTS IN OPTICAL SYSTEMS

Meshkov S.S., Babinovich A.I., Pahotin V.A.

I. Kant Baltic Federal University, ss89@list.ru

The article describes capabilities of digital processing of image and video of separate luminous points in optical systems. The processing method is based on the theory of optimal reception as applied to diffraction peaks containing data about point sources of light. The problem of resolution of separate luminous points is solved with the use of likelihood function modified with likelihood equation. The foundations of the theory of optimum reception are presented; terminology for signal detection and likelihood function has been clarified. The expressions are derived from likelihood function, which determine the optimum processing algorithm for the assessment parameters. The expressions of estimating variance of signal parameters are derived; operating range of processing method is analyzed. Based on the minimum of the functional likelihood a criterion of quality solutions is introduced. The article provides the results of simulation studies in comparison with estimation of signal parameters along diffraction peaks of luminous points.

Keywords: Optimal reception; likelihood function; separate luminous points.

Оптические системы широко используются для решения ряда практических задач: получение информации о микромире (микроскопы), получение информации о мегамире (телескопы), фоторегистрация объектов на поверхности земли с помощью летательных аппаратов, фоторегистрация отдельных объектов, сцен с помощью фотоаппаратов, фотокамер. Основное ограничение связано с явлением дифракции света на входном зрачке оптических систем. Оно переводит точечные объекты в дифракционные максимумы, угловой размер которых зависит от апертуры входного зрачка оптической системы. Возможность разрешения двух светящихся точек определяется критерием Рэлея, согласно которому дифракционный максимум второй светящейся точки должен находиться на угловом расстоянии, превышающем половину углового размера основного дифракционного максимума первой светящейся точки $/2,4/$. При фоторегистрации протяженных объектов с

помощью оптических систем явление дифракции искажает границы объектов и яркостный рельеф фотоизображения объектов. В настоящее время для уменьшения искажающего влияния дифракции при получении информации с помощью оптических систем, как правило, увеличивают апертуру входного зрачка. Однако размеры апертуры часто ограничены техническими возможностями.

В настоящей работе рассмотрены возможности цифровой обработки видеоизображений точечных источников света, в виде дифракционных максимумов, в оптических системах. Основой являются положения теории оптимального приема /5,6/, существенно дополненные разработками Балтийского федерального университета им. И.Канта (БФУ им. И.Канта) /3/. Дополнения касаются технологии решения задачи разрешения двух или более подобных сигналов. Функционал правдоподобия преобразовывается в другой вид, и его минимизация проводится методом перебора в пространстве неэнергетических параметров. Этим достигается высокое разрешение подобных сигналов.

Основные теоретические положения

Разрешающая способность оптических приборов ограничена явлением дифракции света. В результате дифракции на входном зрачке оптической системы точечный источник света преобразуется в протяженный объект – дифракционное распределение света. Угловая ширина главного максимума определяется известным выражением /2,4/:

$$\Delta\theta \approx 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

Где λ длина волны, R – радиус входного зрачка оптической системы.

При наличии двух точечных источников света согласно критерию Рэля их главные дифракционные максимумы будут наблюдаться отдельно, если угловое различие точечных источников $\Delta\varphi \geq \theta = 0.61\lambda/R$. Таким образом, разрешающая способность оптических приборов ограничена предельным углом $\Delta\varphi \geq \Delta\theta = 0.61\lambda/R$. Этим условием определяется разрешающая способность микроскопов, телескопов, глаза человека, т.е. всех оптических приборов, световой поток которых ограничен входным зрачком.

Рассмотрим технологию решения задачи оценки параметров вначале **одного точечного источника света**. Оптическая система преобразует световой поток в дифракционный максимум, который может быть представлен выражением.

$$Y(\theta) = U_0 \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta_0))}{kR\sin(\theta-\theta_0)} + U_{\text{ш}}(\theta)2$$

Где U_0 – амплитуда напряженности поля светового потока, $\theta_0 = \varphi_0$ – угловое положение точечного источника света, $J_1(kR\sin(\theta - \theta_0))$ – функция Бесселя первого порядка, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

$U_{ш}(\theta)$ – шумовая добавка. Она характеризуется нормальным распределением с дисперсией σ^2 , средним значением, равным нулю и интервалом корреляции τ_k . Запишем на основании (2) логарифм функции правдоподобия [3,5,6]:

$$\ln(L(\theta'_0, U'_0)) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| Y(\theta) - U_0 \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta'_{0}))}{kR\sin(\theta-\theta'_{0}))} \right|^2 d\theta \quad 3$$

Штрихами отмечены оценочные параметры сигнала.

Логарифм функции правдоподобия является условной плотностью распределения, максимум которой определяет наиболее правдоподобные оценки параметров сигнала. В связи с этим продифференцируем (3) по амплитуде U'_0 и приравняем дифференциал нулю. В результате получим корреляционную функцию принятого сообщения и копии сигнала с единичной амплитудой:

$$U'_0(\theta'_0) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} Y(\theta) f(\theta, \theta'_{0}) d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta, \theta'_{0})|^2 d\theta}, \quad 4$$

$$\text{где } f(\theta, \theta'_{0}) = \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta'_{0}))}{kR\sin(\theta-\theta'_{0})}$$

Максимум $U'_0(\theta'_0)$ определяет оценку амплитуды U'_0 и оценку углового положения θ'_0 .

Математическое ожидание от выражения (4) в максимуме является несмещенным:

$$M(U'_0) = U_0 \quad 5$$

Оценим дисперсию параметров θ'_0 и U_0 . Для этого получим элементы двумерной информационной матрицы Фишера в соответствии с выражением (6) [3]:

$$J_{ij} = -M \left(\frac{d(\lg(L(\bar{a})))}{da_i da_j} \right) \quad 6$$

Где $\bar{a}^T = (U'_0, \theta'_0)$ – вектор параметров сигнала.

В результате двойного дифференцирования логарифма функции правдоподобия согласно (6) по U'_0 и θ'_0 получим информационную матрицу Фишера:

$$\hat{J} = \frac{1}{\sigma^2\tau_k} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad 7$$

$$\text{Где } a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta, \theta'_{0}) d\theta; \quad a_{12} = a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, \theta'_{0}) \frac{d(f(\theta, \theta'_{0}))}{d\theta'_{0}} d\theta; \quad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{d(f(\theta, \theta'_{0}))}{d\theta'_{0}} \right)^2 d\theta$$

Коэффициенты a_{12}, a_{21} равны нулю вследствие произведения симметричной и антисимметричной подинтегральной функции. Вычисляя диагональные элементы матрицы, обратной к информационной матрице Фишера, получим дисперсию амплитуды D_U и дисперсию углового положения точечного источника D_{θ} :

$$D_U = \frac{\sigma^2\tau_k}{a_{11}}; \quad D_{\theta} = \frac{\sigma^2\tau_k}{a_{22}} \quad 8$$

Таким образом, метод максимального правдоподобия позволяет дать оценку углового положения точечного источника света. Эта оценка не зависит от размера дифракционного пятна. Она определяется с точностью, определяемой дисперсией углового положения

источника света. Вместо дифракционного пятна (протяженного объекта) в результате данной обработки можно получить точечное изображение, угловое положение которого случайно и характеризуется дисперсией.

Рассмотрим случай дифракции двух точечных источников света на круглом отверстии радиуса R . В этом случае распределение света в зависимости от угла дифракции будет представлено в виде суммы двух дифракционных максимума (сигнала) типа (2):

$$Y(\theta) = U_1 \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta_1))}{kR\sin(\theta-\theta_1)} + U_2 \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta_2))}{kR\sin(\theta-\theta_2)} + U_{\text{ш}}(\theta) \quad 9$$

Где θ_1, θ_2 – угловые положения точечных источников света. U_1, U_2 – амплитудные значения точечных источников света.

Обозначим для краткости записи:

$$f_1(\theta, \theta'_1) = \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta'_1))}{kR\sin(\theta-\theta'_1)}; \quad f_2(\theta, \theta'_2) = \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta'_2))}{kR\sin(\theta-\theta'_2)} \quad 10$$

и запишем логарифм функции правдоподобия на основании (9):

$$\ln(L(\theta'_1, U'_1, \theta'_2, U'_2)) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| Y(\theta) - U'_1 \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta'_1))}{kR\sin(\theta-\theta'_1)} - U'_2 \frac{2J_1(kR\sin(\theta-\theta'_2))}{kR\sin(\theta-\theta'_2)} \right|^2 d\theta \quad 11$$

Штрихами отмечены оценочные параметры сигналов.

При наличии двух и более сигналов в принятом сообщении минимизация (11) не приводит к однозначному решению. Покажем это. Математическое ожидание от функционала правдоподобия равно следующему:

$$M(\Delta(\theta'_1, U'_1, \theta'_2, U'_2)) = M\left(\int_{-\pi}^{\pi} |Y(\theta) - U'_1 f_1(\theta, \theta'_1) - U'_2 f_2(\theta, \theta'_2)|^2 d\theta\right) = \int_{-\pi}^{\pi} |U_1 f_1(\theta, \theta_1) - U_2 f_2(\theta, \theta_2) - U'_1 f_1(\theta, \theta'_1) - U'_2 f_2(\theta, \theta'_2)|^2 d\theta + \sigma^2 2\pi \quad 12$$

Подинтегральное выражение в (12) допускает ряд оценочных значений параметров сигналов минимизирующих функционал правдоподобия. Если сигнал в принятом сообщении один, то минимизация функционала правдоподобия (12) однозначна.

Дифференцируя (11) по U'_1 и U'_2 , и приравнявая дифференциалы нулю, получим систему уравнений правдоподобия:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (Y(\theta) - U'_1 f_1(\theta, \theta'_1) - U'_2 f_2(\theta, \theta'_2)) f_1(\theta, \theta'_1) d\theta &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} (Y(\theta) - U'_1 f_1(\theta, \theta'_1) - U'_2 f_2(\theta, \theta'_2)) f_2(\theta, \theta'_2) d\theta &= 0 \end{aligned} \quad 13$$

Используя эти уравнения, как условия, преобразуем логарифм функции правдоподобия к виду:

$$\ln_1(L(\theta'_1, U'_1, \theta'_2, U'_2)) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Y(\theta)|^2 d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} |U'_1 f_1(\theta, \theta'_1) + U'_2 f_2(\theta, \theta'_2)|^2 d\theta \right) \quad 14$$

Математическое ожидание от преобразованного функционала правдоподобия приводит к однозначной его минимизации:

$$M(\Delta_1(\theta'_1, \theta'_2)) =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |U_1 f_1(\theta, \theta_1) + U_2 f_2(\theta, \theta_2)|^2 d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} |U'_1 f_1(\theta, \theta'_1) + U'_2 f_2(\theta, \theta'_2)|^2 d\theta + \sigma^2 2\pi \right) \quad 15$$

Амплитуды U'_1, U'_2 находятся при этом из уравнений правдоподобия (12):

$$U'_1 = \frac{\frac{\overline{Y(\theta)f_1(\theta, \theta'_1)}}{f_1^2(\theta, \theta'_1)} - R \frac{\overline{Y(\theta)f_2(\theta, \theta'_2)}}{\sqrt{f_1^2(\theta, \theta'_2)f_2^2(\theta, \theta'_2)}}}{1-R^2} \quad 16$$

$$U'_2 = \frac{\frac{\overline{Y(\theta)f_2(\theta, \theta'_1)}}{f_2^2(\theta, \theta'_1)} - R \frac{\overline{Y(\theta)f_1(\theta, \theta'_2)}}{\sqrt{f_1^2(\theta, \theta'_2)f_2^2(\theta, \theta'_2)}}}{1-R^2}$$

Где $R = \frac{\overline{f_1(\theta, \theta'_1)f_2(\theta, \theta'_2)}}{\sqrt{f_1^2(\theta, \theta'_1)f_2^2(\theta, \theta'_1)}}$ – нормированный коэффициент корреляции между двумя функциями.

Черта сверху означает интегрирование по параметру θ .

Если угловое различие между дифракционными максимумами удовлетворяет критерию Рэлея (1), тогда коэффициент корреляции близок к нулю и выражения (16) совпадают с выражениями типа (4).

Если угловое различие меньше, чем определено в (1), тогда согласно классическим представлениям (критерий Рэлея) светящиеся точки сливаются вместе. Коэффициент корреляции в этом случае будет отличен от нуля и решения находятся по значению минимума поверхности функционала $\Delta(\theta'_1, \theta'_2)$ в двумерном пространстве углов θ'_1 и θ'_2 (14). В точке минимума поверхности функционала правдоподобия согласно (15) оценочные значения амплитуд и углов равны: $U'_1 = U, U'_2 = U_2, \theta'_1 = \theta_1, \theta'_2 = \theta_2$.

Оценим дисперсии углового положения двух светящихся точек и дисперсии их амплитудных значений напряженности поля. Для этого продифференцируем логарифм функции правдоподобия по параметрам U'_1 и U'_2 два раза. Получим элементы информационной матрицы Фишера:

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{\sigma^2 \tau_k} \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \end{pmatrix} \quad 17$$

Где $a_{111} = \overline{f_1^2(\theta, \theta'_1)}, a_{122} = \overline{f_2^2(\theta, \theta'_2)}, a_{112} = a_{121} = \overline{f_1(\theta, \theta'_1)f_2(\theta, \theta'_2)}$.

Определяя диагональные элементы матрицы, обратной к информационной матрице Фишера, получим дисперсии амплитуд от первой и второй светящихся точек D_{u1}, D_{u2} :

$$D_{u1} = \frac{\sigma^2 \tau_k}{a_{111}(1-R^2)}, D_{u2} = \frac{\sigma^2 \tau_k}{a_{122}(1-R^2)}, R1 = \frac{\overline{f_1(\theta, \theta'_1)f_2(\theta, \theta'_2)}}{\sqrt{f_1^2(\theta, \theta'_1)f_2^2(\theta, \theta'_2)}} \quad 18$$

Аналогично можно получить дисперсии угловых положений светящихся точек $D_{\theta1}, D_{\theta2}$. В этом случае информационная матрица Фишера будет:

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{\sigma^2 \tau_k} \begin{pmatrix} a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{pmatrix} \quad 19$$

$$\text{Где } a_{211} = U_1'^2 \left(\frac{df_1(\theta, \theta'_1)}{d\theta'_1} \right)^2, a_{222} = U_2'^2 \left(\frac{df_2(\theta, \theta'_2)}{d\theta'_2} \right)^2, a_{212} = a_{221} = U_1' U_2' \left(\frac{df_1(\theta, \theta'_1)}{d\theta'_1} \frac{df_2(\theta, \theta'_1)}{d\theta'_2} \right)$$

Определяя диагональные элементы обратной матрицы, получим:

$$D_{\theta_1} = \frac{\sigma^2 \tau_k}{U_1'^2 a_{111} (1-R^2)}, D_{\theta_2} = \frac{\sigma^2 \tau_k}{U_2'^2 a_{122} (1-R^2)}, R^2 = \frac{a_{212}}{\sqrt{a_{211} a_{222}}} \quad 20$$

Таким образом, дисперсии угловых положений светящихся точек зависят от отношений сигнал/шум и взаимной корреляции дифракционных максимумов. Дисперсии будут минимальны, когда $R^2 = 0$. Однако, если отношение сигнал/шум достаточно большое (более 15 дБ), тогда при приемлемых дисперсиях коэффициент корреляции может достигать значения 0.9 и выше. Это сильно перекрывающиеся дифракционные максимумы.

Предварительные результаты модельных расчетов

Изложим результаты предварительных модельных исследований вопросов разрешения двух точечных источника света. На рис.1 показаны два дифракционных максимума, полученных при следующих параметрах: амплитуды сигналов $U_1 = 2$, $U_2 = 1,5$, угловые положения источников света $\theta_1 = 10^\circ$, θ_2 – меняется линейно от значения $10,4^\circ$ до 13° с шагом $0,4^\circ$. При этом обеспечиваются условия ортогональности двух дифракционных максимумов ($\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 \geq 11,2^\circ$) и условия неортогональности ($\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 10,4^\circ \div 11,2^\circ$). Относительный размер входного зрачка системы $R/\lambda = 30$.

На рис. 1 дифракционные максимумы находятся в области их ортогональности ($\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 13^\circ$). Максимумы и их положения позволяют оценить (точечная оценка) амплитуды и угловые положения двух точечных источников света:

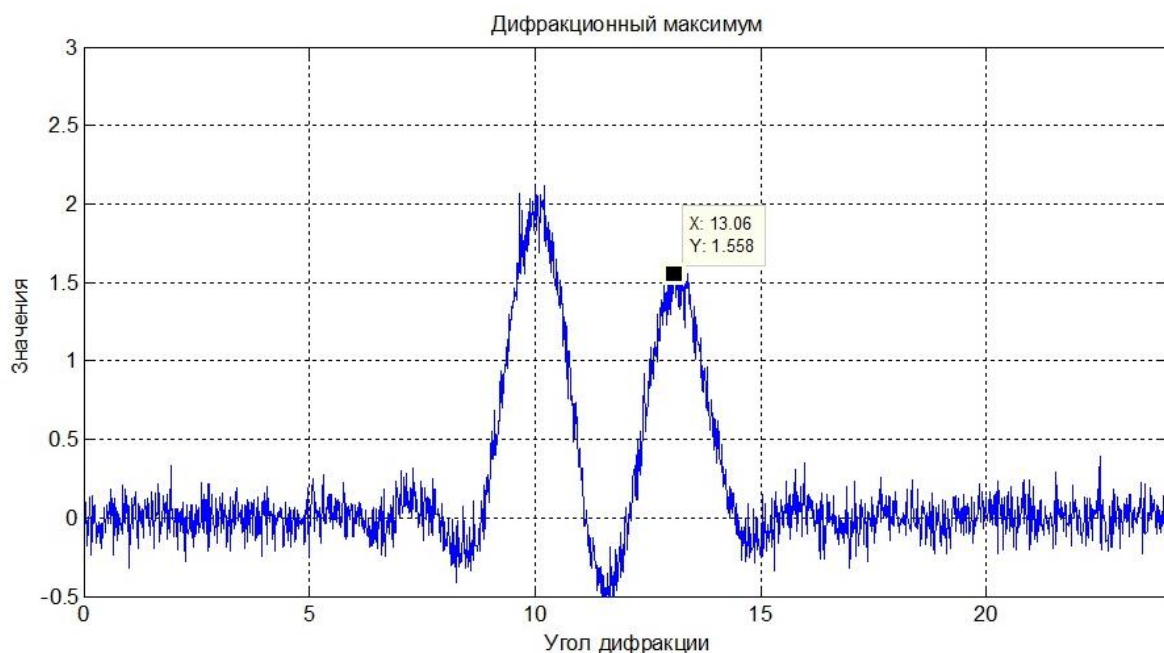
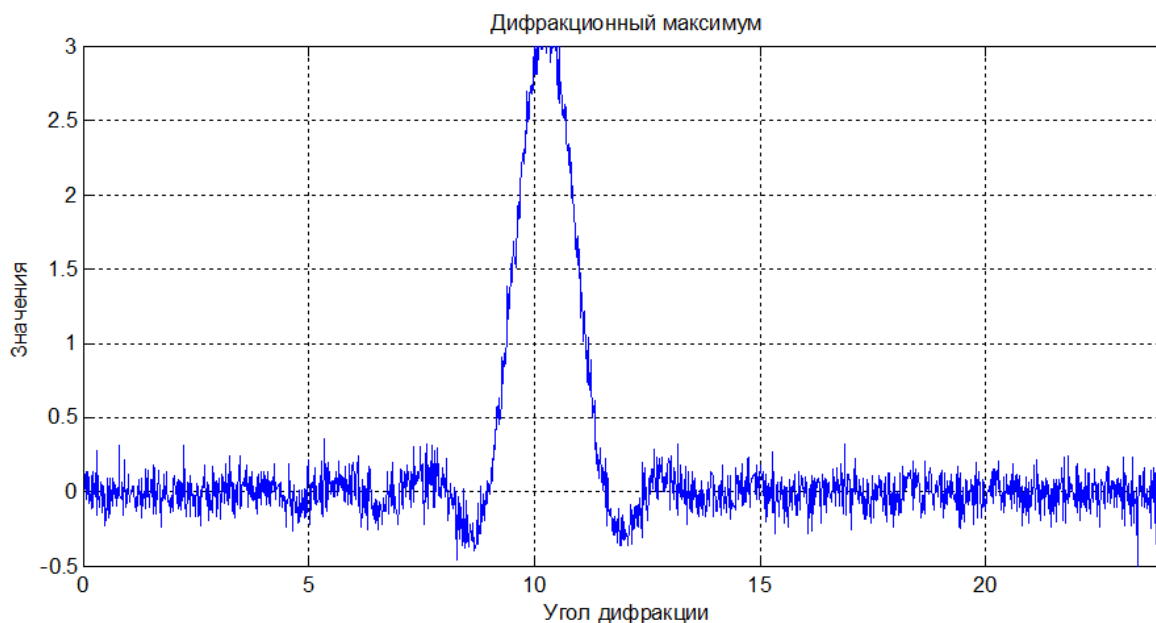


Рис.1. Дифракционные максимумы двух точечных источника света

На рис. 2 показаны два дифракционных максимума в области их неортогональности, когда угловые положения равны $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 10,8^\circ$. Разрешить источники света в этом случае согласно критерию Рэля невозможно:



*Рис. 2. Два дифракционных максимума в области их неортогональности ($\theta_1=10^\circ, \theta_2=10,8^\circ$).
Максимумы сливаются*

Возможность решения задачи разрешения двух точечных источника света методом максимального правдоподобия, как в области ортогональности, так и в области неортогональности дифракционных максимумов, показана на рис. 3. По горизонтальной оси отложена разность между угловыми положениями источников света в градусах. По вертикали показаны оценки углового положения первого источника света ($\theta_1 = 10^\circ$) и оценки линейно меняющихся угловых положений второго источника света: ($\theta_2 = 10,4^\circ \div 13^\circ$).

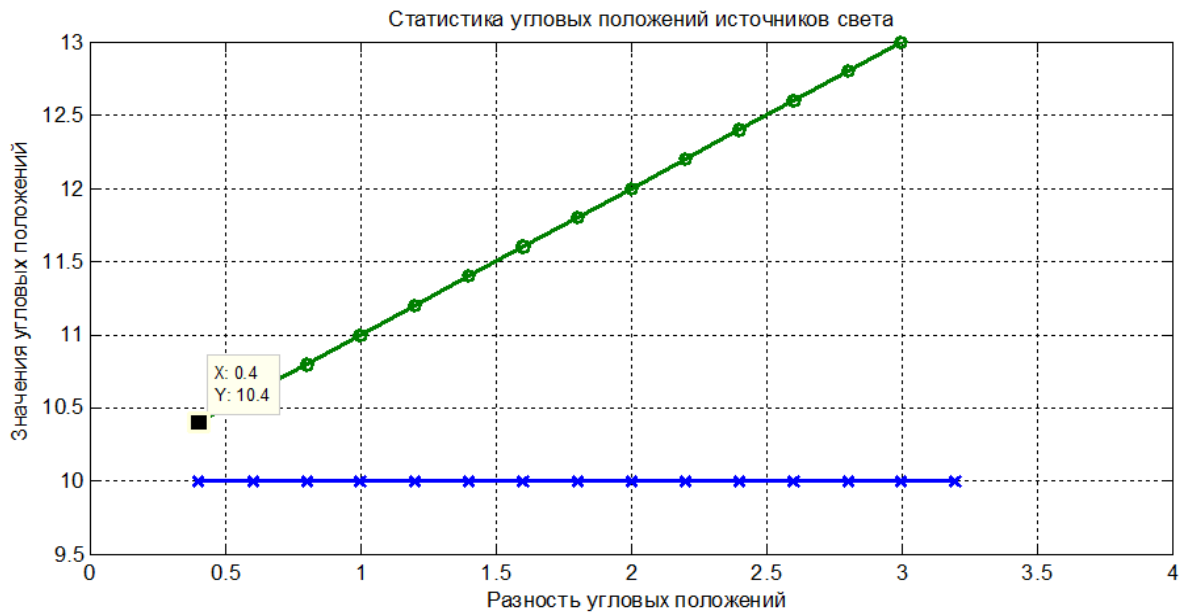


Рис.3. Зависимость угловых положений источников света от разности угловых положений

Как видно из рисунка два источника света вполне разрешаются даже при угловом различии $\Delta\theta = 0,4^\circ$. Это соответствует коэффициенту корреляции между дифракционными максимумами ~ 0.9 .

На рис. 4 показаны отдельные оценки амплитуд двух точечных источников света при использовании метода максимального правдоподобия:

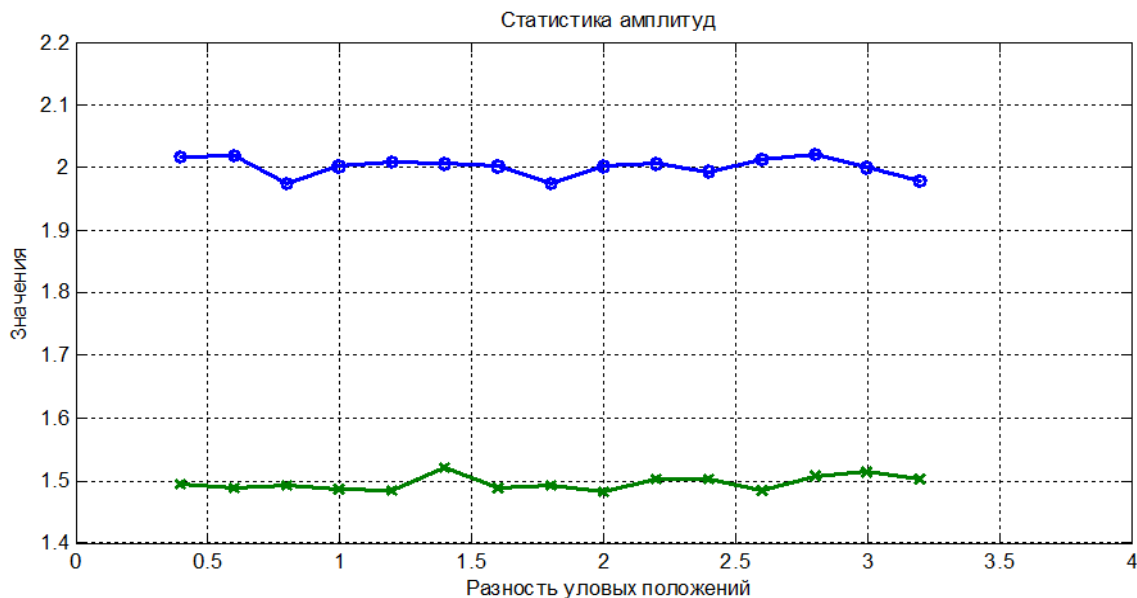


Рис. 4. Оценки амплитуд в зависимости от разности угловых положений точечных источников света

Таким образом, с помощью модельных расчетов показано, что метод максимального правдоподобия обеспечивает увеличения разрешения двух точечных источников света в оптических системах в ~ 4 раза по сравнению с Рэлеевским разрешением.

Заключение

Изложим кратко результаты настоящей работы.

1. На основе положения теории оптимального приема создан метод обработки дифракционных максимумов, позволяющий увеличить разрешающую способность оптических систем:

- получены основные выражения, определяющие оптимальный алгоритм обработки дифракционных максимумов;

- получены выражения для дисперсии оценочных параметров точечных источников света.

2. Показано с помощью модельных расчетов, что созданный метод обработки позволяет увеличить разрешение двух точечных источника света в оптических системах по сравнению с Рэлеевским разрешением в ~ 4 раза.

Список литературы

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов по специальности «Радиотехника». 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.: ил.

2. Ландсберг Г. С. Оптика. – М.: Наука, 1976.

3. Пахотин В.А., Бессонов В.А., Молостова С.В., Власова К.В. Теоретические основы оптимальной обработки сигналов – курс лекций для радиофизических специальностей. – Калининград: Изд-во РГУ им.И.Канта, 2008. – 200 с.

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. Т. IV. – М.: Наука, 1980. – 752 с.

5. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.

6. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986.

Рецензенты:

Захаров В.Е., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой радиофизики и информационной безопасности Балтийского федерального университета им. И. Канта Минобрнауки, г. Калининград;

Никитин М.А., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры физики БФУ им. И. Канта, г. Калининград.