УДК 330.42

МАТЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФУНКЦИЙ СПРОСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Воржев В.Б.[1], Балдин О.В.[1], Никоненко Н.Д.[2]

[1]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия (344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), e-mail: caroling@mail.ru*
[2]*Южно-Российский институт управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Ростов-на-Дону, Россия (344000, Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 70*

Уровень развития современной вычислительной техники позволяет строить различного рода прикладные математические модели, в том числе в области экономики, главной целью которых является возможность применения богатого инструментария высшей математики для адекватного описания динамики различного рода процессов. На сегодняшний день такой подход вполне оправдан, даже если построенные математические модели имеют сложный аналитический вид, поскольку современные математические программные пакеты позволяют устранить такого рода неудобства. В приведенной статье приведена математическая модель функций спроса, гладко и непрерывно переходящих одна в другую по мере роста общего дохода. Такая модель позволяет применять для анализа экономических процессов богатейший аппарат математического анализа и дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функции спроса, функция Энгеля, функции Торнквиста, степенные коэффициенты функции полезности

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF DEMAND FUNCTIONS USING A SEMI EMPIRIC MODEL

Vorzhev V.B.[1], Baldin O.V.[1], Nikonenko N.D.[2]

[1]*Don State Technical University, Rostov on Don, Russia (1, Gagarin Avenue Rostov-on-Don Russia), e-mail: caroling@mail.ru*
[2]*South Russian Management University, Rostov on Don, Russia (70, Pushkin Street, Rostov-on-Don, Russia)*

The level of development of modern computer technology makes it possible to build a different kind of applied mathematical models, including in the field of economy. The main goal of these models is the ability to use a rich toolkit of higher mathematics to adequately describe the dynamics of different kinds of processes. Today, this approach is justified, even if the construction of mathematical models are complex analytic form as modern mathematical software packages allow you to remove this kind of inconvenience. In the above article presents a mathematical model of demand functions smoothly and continuously passing one another with increasing total revenue. This model allows for the analysis of economic processes for the rich apparatus of mathematical analysis and differential equations.

Keywords: demand functions, Engel function, Tornquist function, degree coefficients of useful function

Математические методы и модели в экономике являются мощным инструментом при исследовании различного рода общественно-экономических процессов в современном обществе. Применение в этой области широкого спектра математических методов позволяет исследовать динамику происходящих процессов с возможностью прогноза их развития.

Одним из таких процессов является перераспределение дохода потребителя между товарами различных категорий, описываемое с помощью функций спроса. С их помощью оказывается возможным проследить связь между изменением систем цен и доходов групп потребителей, с одной стороны, и спросом этих групп на товары и услуги, — с другой, решив таким способом задачу оптимального выбора потребителя. По этой причине удобное с точки зрения прикладной математики описание этих функций позволяет значительно упростить конструируемые с их помощью математические модели.

Постановка задачи

Как известно, для изучения изменения спроса в зависимости от дохода различных потребительских групп применяются в основном модели двух типов [3], [5].

1. Модель степенного ряда (функция Энгеля [2])

$D(I) = aI^{\alpha}$,

где α < 1 для спроса на предметы первой необходимости (1-й категории); α = 1 для спроса на товары длительного пользования (2-й категории); α > 1 для спроса на товары роскоши (3-й категории).

2. Функции Торнквиста

$$D_1(I) = \frac{a_1 I}{b_1 + I}, 0 < I < I_1;$$

$$D_2(I) = \frac{a_2(I - I_1)}{b_2 + I}, I_1 < I < I_2;$$

$$D_3(I) = \frac{a_3(I - I_2)}{b_3 + I}, I > I_2.$$

Здесь $D_1(I)$, D2(I), $D_3(I)$ определяют соответственно зависимости спроса от дохода на предметы первой необходимости, товары длительного пользования и товары роскоши соответственно.

Однако при таких представлениях возникает проблема согласования этих зависимостей, т. е. гладкого (с сохранением непрерывности первой и второй производной) перехода с одной зависимости на другую при непрерывном росте дохода.

В настоящей статье предложен способ, позволяющий получить аналитические зависимости для всех трех функций $D_1(I)$, D2(I), $D_3(I)$ с сохранением непрерывности их первых и вторых производных. Это позволяет применять при решении различного рода экономических задач богатый инструментарий методов математического анализа.

Описание метода

2.1. Для функции $D_1(I)$ справедливо следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{d}{dI} D_1(I) = D_{1max} - CD_1 \qquad (2.1)$$

которое показывает, что убывание скорости спроса на товары первой необходимости должно быть пропорционально некоему предельному значению спроса D_{1max}, после достижения которого потребность в товарах этой категории можно считать в первом приближении удовлетворенной. При этом величина D_{1max} может быть получена путем статистического опроса населения (об исследованиях в данном направлении см. [2], [4]).

Тогда, решая это дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{d}{dI} D_1(I) + CD_1 = D_{1max};$$

$$D_1(I) = D_{1max}(1 - e^{-CI}) \qquad (2.2).$$

При выборе константы C учтем, что рост спроса не должен превышать роста доходов, поэтому для величины скорости роста спроса должно выполняться соотношение: $dD_1(0)/dt = 1$, поэтому получим:

$$CD_{1max} = 1; C = \frac{1}{D_{1max}}.$$

Окончательно, для функции $D_1(I)$ получим:

$$D_1(I) = D_{1max}\left(1 - e^{-\frac{I}{D_{1max}}}\right) \qquad (2.3).$$

Как показывает рисунок 1, данная зависимость вполне адекватно отображает свойства функции спроса на товары первой необходимости.

2.2. Для дальнейшего построения модели примем положение о том, что с началом насыщения функции $D_1(I)$ вся оставшаяся часть доходов будет вначале расходоваться потребителем только лишь на потребление товаров 2-й категории, и только лишь потом, когда функция $D_2(I)$, перейдет в насыщение, часть доходов начнет поступать на приобретение товаров роскоши.

В этом случае для получения функции $D_2(I)$ следует вначале проанализировать следующую зависимость:

$$I - D_1(I) = I - D_{1max}\left(1 - e^{-\frac{I}{D_{1max}}}\right).$$

Эта зависимость, начиная с некоторой точки I^*, должна переходить в насыщение, подобно полученной ранее функции $D_1(I)$ (см. рис. 1). Функция с подобным характером роста известна из физики и в приложении к исследуемому процессу выглядит так:

$$D_2(I) = A - \frac{B}{e^{\frac{I-a}{b}} + 1} \qquad (2.4).$$

Определим константы A, B и b исходя из исследуемой модели.

Очевидно, что $D_2(0)=0$, поэтому получим соотношение:

$$A = \frac{B}{e^{-\frac{a}{b}} + 1} \qquad (2.5).$$

Кроме того, согласно модели:

$$\lim_{I \to \infty} D_2(I) = D_{2max},$$

поэтому

$$A = D_{2max}, \qquad (2.6).$$

Значит,

$$B = D_{2max}\left(e^{-\frac{a}{b}} + 1\right) \qquad (2.7).$$

Подставив (2.5) – (2.7) в (2.4), получим:

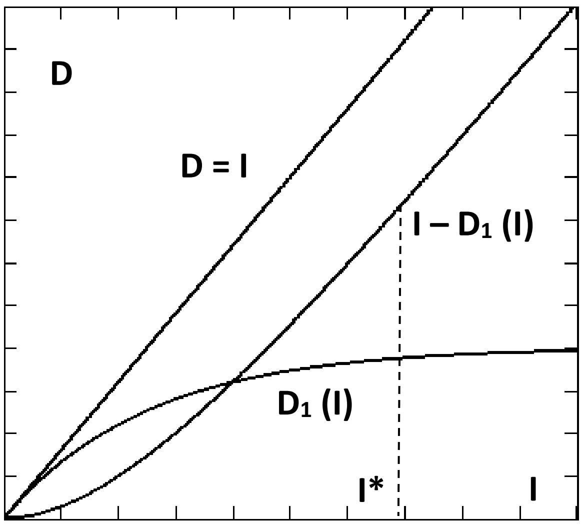

Рис. 1. Зависимости D = I, D_1 (I) и I – D_1 (I)

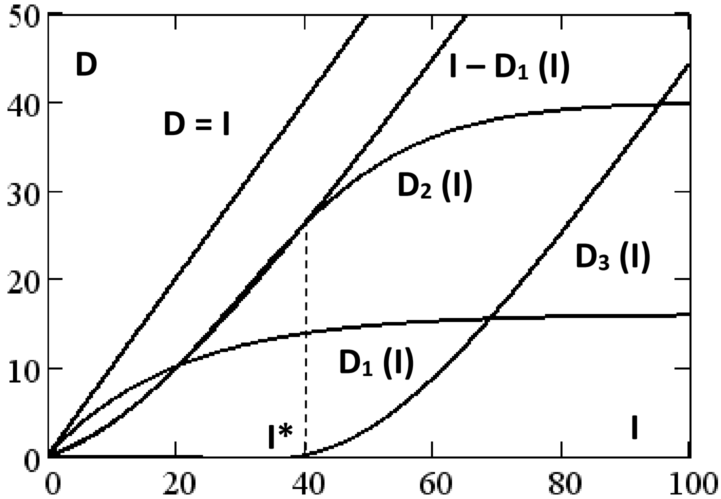

Рис. 2. Зависимости D = I, D_1 (I), I – D_1 (I), D_1 (I) и D_3 (I) для величин D_{1max} = 16, D_{2max} = 40, a = 30, b = 43

$$D_2(I) = D_{2max}\frac{e^{\frac{I-a}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}}{e^{\frac{I-a}{b}} + 1} \qquad (2.8).$$

Константы a и b могут быть подобраны с помощью какого-либо математического программного пакета так, чтобы величина ошибки на промежутке от 0 до I^* была наименьшей. В настоящей статье они подбирались в программной среде MathCad.

На рисунке 2 представлены результаты такого приближения для величин $D_{1max} = 16$, $D_{2max} = 40$, $a = 30$, $b = 43$. Как видно из рисунка 2, функциональная зависимость, показывающая весь оставшийся доход, непротиворечиво описывает зависимость $D_3(I)$ – зависимость спроса на товары роскоши от общего дохода. Согласно рассматриваемой модели для $D_3(I)$ получим:

$$D_3(I) = I - D_1(I) - D_2(I).$$

Из общих соображений понятно, что при неограниченном возрастании общего дохода (т. е. при условии $I\to\infty$), функция $D_3(I)$ будет стремиться к I, причем никогда не достигнет этой величины. Такой характер поведения вполне согласуется с ее представлениями кривыми Торнквиста.

Математически получим:

$$\lim_{I\to\infty} D_3(I) = I - \lim_{I\to\infty} D_1(I) - \lim_{I\to\infty} D_2(I) = I - D_{1max} - D_{2max}.$$

В таблице 1 представлены подобранные программными методами пары коэффициентов a и b для некоторых наборов величин D_{1max} и D_{2max}. Для всех рассмотренных случаев величина ошибки $\delta(I) = I - D_1(I) - D_2(I)$ достаточно мала во всем интервале величин I от 0 до I^*.

Таблица 1

Рассчитанные программным способом пары коэффициентов a и b для некоторых пар значений D_{1max} и D_{2max}

D_{1max}	D_{2max}				
	30	35	40	45	50
14	a = 26 b = 35	a = 29 b = 39	a = 31,5 b = 43	a = 34 b = 47	a = 36 b = 50
16	a = 27,5 b = 37	a = 30 b = 41	a = 33 b = 45	a = 35,5 b = 48	a = 38 b = 52
18	a = 28 b = 38	a = 31 b = 42	a = 34 b = 46	a = 37 b = 50	a = 39 b = 54
20	a = 30 b = 40	a = 33 b = 44	a = 36 b = 48	a = 38 b = 51	a = 41 b = 55

Возможности применения метода

Приведенная ниже аппроксимация может быть использована для анализа распределения доходов между тремя основными группами товаров для различных групп потребителей. Ее достоинством является возможность представления зависимостей D_k (I), k = 1, 2, 3 в аналитическом виде, гладкими кривыми, что в свою очередь позволяет рассматривать широкий спектр задач прикладной экономики.

Так, например, представляется интересным исследовать динамику роста спроса на товары различных категорий с точки зрения функции полезности, которая, как известно, может быть представлена следующим образом:

$$u = D_1{}^{\alpha} D_2{}^{\beta} D_3{}^{\gamma} \qquad (3.1).$$

Очевидно, что параметры α, β, и γ будут изменяться в зависимости от общего дохода I таким образом, что функция полезности всегда оставалась максимальной. Отметим также, что величины D_1, D_2, D_3 также будут являться функциями от I согласно построенной модели.

Поскольку при любой величине I потребитель пытается оптимизировать свой доход с целью приобретения товаров всех категорий с наибольшей полезностью для себя, то производная функции полезности $u'(I)$ будет обращаться в ноль на всей траектории изменения коэффициентов α, β, и γ. Поиск решения в общем виде представляется весьма непростой задачей, поэтому будем искать ее решение на отдельных участках.

Пусть I < I*, тогда приближенно можно считать, что

$$u = D_1{}^{\alpha} D_2{}^{\beta} \qquad (3.2).$$

Для функции полезности в любой оптимальной точке (D_1;D_2) имеем:

$$\alpha D_1{}^{\alpha-1} D_1{}' D_2{}^{\beta} + \beta D_1{}^{\alpha} D_2{}^{\beta-1} D_2' = 0.$$

Учтем тот факт, что $D_1 + D_2 = I = const$, и, значит, $D_1' = D_2'$ (оптимальное решение выбирается при некоем фиксированном доходе), тогда

$$\alpha D_1{}^{\alpha-1} D_1'^{(I-D_1)^{\beta}} + \beta D_1{}^{\alpha} (I - D_1)^{\beta-1} D_1' = 0;$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{D_1}{I - D_1}.$$

Если при этом учесть, что в предположении γ = 0, α + β = 1, то получим выражения для отыскания значений искомых коэффициентов для любых значений D_1 и D_2:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{D_1}{I - D_1},$$

и, окончательно:

$$\alpha = \frac{D_1}{I}, \beta = \frac{D_2}{I}.$$

Далее, пусть $I > I^*$; пренебрегая влиянием на функцию полезности величины спроса D_1, получим:

$$u = D_2^{\beta} D_3^{\gamma} \qquad (3.3).$$

Аналогично полученному ранее запишем:

$$\beta = \frac{D_2}{I}, \gamma = \frac{D_3}{I}.$$

Величину α на этом участке можно с некоторым приближением рассчитывать исходя из условия:

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma.$$

Произведенные таким образом расчеты представлены на рисунке 3 в виде зависимостей $\alpha(I)$, $\beta(I)$, $\gamma(I)$. Благодаря гладкому характеру функций $D_k(I)$, $k = 1, 2, 3$ все эти зависимости также имеют гладкий характер. Кроме того, их динамика хорошо описывает процессы насыщения спроса товара k-й группы с последующим роста спроса на товар (k + 1)-й группы.

Следует также отметить некоторые проблемные моменты вышеописанной модели,

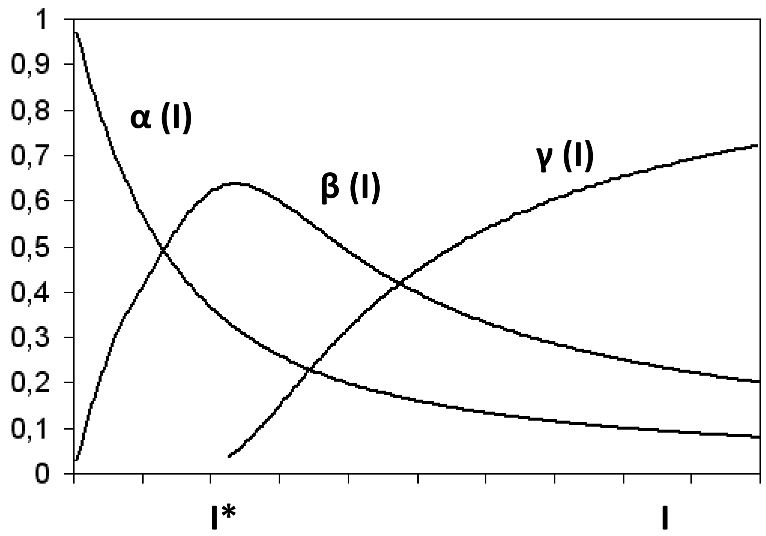

Рис. 3. Зависимости степенных коэффициентов α, β, γ функции полезности от величины общего дохода

которые являются, однако, вполне устранимыми, а потому могут быть отнесены к ее «техническим» недостаткам.

1. Функция $D_1(I)$ задана только лишь параметром D_{1max}, что не позволяет управлять ее начальным участком, когда весь доход идет только лишь на потребление товаров 1-й категории. Для устранения этого недостатка следует либо несколько усложнить вид этой функции, введя в нее новые параметры, либо положить ее равной величине I на этом участке.

2. При значительном увеличении дохода ($I \to \infty$), функция $D_1(I)$ асимптотически приближается к величине D_{1max}, что, строго говоря, не соответствует действительности, поскольку спрос на товары 1-й категории все-таки продолжает расти, хотя и с небольшой скоростью. В этом случае представляется возможным описание функции $D_1(I)$ в виде:

$$D_1(I) = D_{1max}\left(1 - e^{-\frac{I}{D_{1max}}}\right) + pI,$$

где p — специально подобранный параметр, настолько малый, что действие его начинает сказываться лишь при достаточно больших величинах I. Сказанное можно отнести также к начальному участку функции $D_2(I)$.

3. Функция $D_2(I)$ на начальном участке своей зависимости имеет некоторое расхождение с функцией $I – D_1(I)$, что может привести к неприятным «скачкам» в прикладных расчетах. В этом случае ее можно заменить на этом участке самой функцией $I – D_1(I)$, имеющей гладкую форму.

Список литературы

1. Аллен Р. Математическая экономия: М. ИЛ. 1963. – 667 с.
2. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика: Изд. 2-е, испр. — СПб. Экономическая школа. 1996. — С. 125–128.
3. Минюк С.А., Ровба Е.А., Кузьмич К.К. Математические методы и модели в экономике: Минск. Тетрасистемс. 2002. – 429 с.
4. Петров П.В., Соломатин А.Н. Прогнозирование емкости рынка: Лекции. — СПб. ТЭИ. 1997. — 30с.
5. Хачатрян Н.К. Математическое моделирование экономических систем: М.: Экзамен. 2008. – 158 с.

Рецензенты:

Анесянц С.А., д.э.н., профессор, руководитель Центра исследования рынка ценных бумаг института управления, бизнеса и права, г. Ростов-на-Дону;

Белоусов В.М., д.э.н., профессор кафедры «Экономическая социология и региональное управление» Института социологии и регионоведения Южного Федерального университета, г. Ростов-на-Дону.