УДК 378.147(018)

О МНЕМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ МОДЕЛИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Ярахмедов Г.А.[1], Абдуразаков М.М.[2], Казибеков Т.Л.[1]

[1]ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный педагогический университет», Махачкала, Россия (367013, г. Махачкала, пр. Гамидова 17), e-mail: yari.85@mail.ru
[2]Институт содержания и методов обучения РАО (г. Москва), e-mail: abdurazakov@inbox.ru

Применяя основные принципы, методы и положения интегральных концепций развития современной науки и комплексной модели обучения математике в вузе, разработанной одним из авторов настоящей статьи, в педагогической и исследовательской деятельности предлагается актуализировать методы долгосрочного запоминания математических знаний построением мнемосхем. Такая мнемическая деятельность направлена на выявление общих закономерностей и логических схем, на развитие ассоциативного мышления и формирование у студентов восприятия целостных образов математических понятий междисциплинарного характера. В формализованном представлении математических понятий (объектов) обращается внимание на присутствие в них двух противоположных начал – симметрического и кососимметрического. Симметричность характерна скалярному произведению, а кососимметричность – векторному (внешнему) произведению векторов. Схемы матричного представления векторов и ковекторов, а также определенные правила их взаимодействия оказались связанными логической схемой формализации геометрических и алгебраических понятий на аналитическом языке в виде формул Грина, Гаусса – Остроградского и Стокса. Некоторые разновидности предложенных схем определяют даже условия существования математических объектов (условия Коши - Римана). Такие схемы способствуют запоминанию фундаментальных связей между понятиями различных предметных областей и расширению познавательных способностей субъектов деятельности. Целесообразность такой методики подтверждается результатами проведенного мониторинга процесса запоминания полученных математических знаний.

Ключевые слова: мнемическая деятельность, мнемосхема, комплексная модель, интегральная концепция, метапредметная деятельность, вектор, ковектор.

ABOUT MNEMONIC ACTIVITY IN AN INTEGRATED MODEL OF TEACHING MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL

Yarakhmedov G.A.[1], Abdurazakov M.M.[2], Kazibekov T.L.[1]

[1]FGBOU VPO "The Dagestan state pedagogical university", Makhachkala, Russia (367013, G. Makhachkala, Gamidov Ave. 17), e-mail: yari .85@mail.ru;
[2]Institute of the contents and methods of training of Russian joint stock company (Moscow), e-mail: abdurazakov@inbox.ru

Applying basic principles, methods and regulations integral concepts of modern science and an integrated model of teaching mathematics in high school, developed by the author in teaching and research activities proposed to update the methods of long-term memorization of mathematical knowledge construction mimics. Such mnemonic activity is aimed at identifying common patterns and logic, on the development of associative thinking and formation of students' perception of the integrity of the image of mathematical concepts of an interdisciplinary nature. In the formalized representation of mathematical concepts (objects) draws attention to the presence in these two opposing principles - symmetric and skew. Symmetry characteristic scalar product, and skew - Stock (external) product of vectors. Schemes matrix representation of vectors and covectors, as well as certain rules of their interaction were associated logic formalization of geometric and algebraic concepts on the analytical language in the form of Green's formulas, Gauss - Ostrogradskii and Stokes. Some species of the proposed schemes even define conditions for the existence of mathematical objects (Cauchy - Riemann). Such schemes contribute to remembering the fundamental relationships between concepts of different subject areas and expand cognitive abilities stakeholders. The expediency of such a technique is confirmed by the results of the monitoring process of memorizing new mathematical knowledge.

Keywords: mnemonic activity, mimic, the integrated model, the integrated concept, a meta-activity vector covector.

В современный период развития общества и науки, названный информационным, математическое образование требует глубоких преобразований в связи с концептуальными изменениями парадигмального характера в познавательной деятельности, представляемой постнеклассическим типом рациональности. В дидактике математики происходит процесс перестройки основ методики обучения, связанный, прежде всего, с доминированием в познавательной деятельности интегративных тенденций и методов дискретной математики и синергетики. Это связано, в первую очередь, с основополагающей ролью в получении знаний в различных областях понятия «информации», а характеристическим свойством информации является дискретность.

Следует отметить, что в настоящий период в системных исследованиях познавательной деятельности разработаны различные аспекты интегральных концепций и интегративных подходов к обучению математике: психологический аспект (А.Г. Асмолов, Г.А. Балл, Э.Е. Бехтель, Дж. Брунер, П.Я. Гальперин, В.А. Ганзен и др.) [1; 2]; культурологический аспект (А.Ю. Большакова, А.В. Волошинов, Т.В. Иванова, Е.А. Перминов, А.Е. Чучин-Русов и др.) [3; 5; 6]; философский аспект (Ю.С. Владимиров, В.С. Меськов, А.А. Мамченко, В.С. Степин, О.Ф. Теребилов, С.К. Черепанов, В.А. Штофф, В.А. Яковлев и др.) [4; 9]; подход прогрессивно-технологического обучения (Е.З. Власова, Г.Л. Ильин, В.М. Монахов, В.А. Сластенин и др.) [8]; интегративный подход (В.Н. Воронин, В.А. Далингер, А.Я. Данилюк, И.Ю. Дик, Н.К. Чапаев и др.) [5].

В связи с этим в математическом образовании следует актуализировать методику и методы комплексного подхода к обучению математике, построенного на основе комплексного (интегрального) мышления, имеющего триадическую структуру (математическое, диалектическое, жизнедеятельностное), и выделенных нами основных методологических принципов [10]. Такой подход в обучении математике позволяет выявить структурные единицы, которые находятся в однозначном соответствии с аналогичными структурами в других разделах математики, и выделить общие логические схемы. В этих схемах по определенному логическому плану устанавливается соответствие между основными понятиями алгебраических, геометрических и логических структур и фундаментальными понятиями физических структур. Выявление такой связи структур имеет важное значение в обучении математике с точки зрения целостного восприятия объекта исследования и долговременного запоминания этих связей в формализованном виде.

Таким образом, определенные логические схемы (мнемосхемы), связывающие понятия структур различных предметных областей в единое целое, имеют важное значение в мнемической деятельности и практике применения полученных знаний для решения задач прикладного характера.

Под мнемической деятельностью понимается активная деятельность человека, направленная на запоминание и воспроизведение материала, а мнемосхема определяется как графическая информационная модель, условно отображающая функционально-техническую схему управляемого объекта и информацию о его состоянии в объеме, необходимом для выполнения оператором возложенных на него функций [7].

Цель исследования: на основе фундаментальных понятий различных разделов математики выявить общие закономерности взаимодействия элементов соответствующих структур (синергизм) и логическую схему метапредметного содержания (мнемосхему), на основе которых строится мнемическая деятельность, ориентированная на долгосрочное запоминание основных формализованных связей базисных компонентов моделей представления знаний междисциплинарного характера и на формирование общекультурных и профессиональных компетенций.

Формирование приемов смысловой, логической обработки запоминаемого материала рассматривается как основной путь не только повышения эффективности работы памяти, но и развития логической составляющей мышления, столь важной при обучении математике, и воспитания культуросообразной личности, способной целостному восприятию изучаемого предмета. Здесь мы укажем на некоторую систему различных приемов и методов, облегчающих запоминание и увеличивающих объем памяти и знаний путем образования искусственных ассоциаций (мнемоника, мнемотехника). Запоминание определенного материала происходит различными языковыми средствами, способствующими активизации и интегрированию процессов, служащих средством воспроизведения знаний об одном и том же объекте на различных изоморфных математических моделях.

Поясним предлагаемую процедуру мнемической деятельности при обучении математике в педагогическом вузе для физико-математических специальностей на конкретных примерах. Она же, очевидно, в несколько ином виде применима при обучении математике студентов технических и даже гуманитарных специальностей.

Один из основных объектов геометрии – прямая - почти во всех пособиях по высшей математике обычно представляется общим уравнением в виде

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение и другие его разновидности получают, пользуясь свойствами коллинеарности или перпендикулярности текущего вектора, направляющего вектора и вектора нормали прямой. Перепишем уравнение (1) в виде

$$Ax + By = - C. \qquad (2)$$

Тогда левую часть этого уравнения можно интерпретировать как скалярное произведение текущего вектора **OM**(x,y) и вектора нормали **n**(A,B), а сама прямая определяется при этом как множество точек плоскости, каждая из которых сохраняет скалярное произведение векторов **OM** и **n** постоянным и равным – C. Механически левая часть уравнения (2) представляет собой работу силы **F = OM** на перемещение точки прямой на вектор **n**. Тогда прямая (2) определяется как множество точек плоскости, каждая из которых под действием силы **OM**, перемещаясь на вектор **n**, совершает одну и ту же работу, равную – С. Итак, прямая определяется через скалярное произведение, обладающее свойством коммутативности.

Теперь представим уравнение (2) в виде

$$\begin{vmatrix} x & -B \\ y & A \end{vmatrix} = -C. \qquad (3)$$

Левая часть уравнения (3) представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах **OM** (x,y) и **p** (- В,А) – направляющего вектора прямой, т.е. абсолютные значения левой и правой частей уравнения (3) равны длине векторного произведения векторов **OM** и **p**. Механически эта длина совпадает с длиной момента количества движения точки единичной массы относительно точки О, т.е. $|[\mathbf{OM},\mathbf{p}]|$. Тогда прямая на плоскости представляется и как множество точек, для каждой из которых площадь параллелограмма, построенного на векторах **OM** и **p**, постоянна и равна – С, и как множество точек плоскости, для каждой из которых длина момента количества движения относительно точки О постоянна и равна $|-C| = |C|$.

Таким образом, прямую на плоскости можно интерпретировать на разных моделях представления как с помощью скалярного произведения (симметрическая операция), так и с помощью векторного произведения (кососимметрическая операция). В обучении математике такая двойственность понятий позволяет глубже понять сущностную связь интенциального и реального, абстрактного и эмпирического, идеального и материального.

Суммируя высшесказанное, выделим мнемосхему следующим образом. Из координат векторов плоскости $\boldsymbol{x}$ (x_1, x_2) и $\boldsymbol{y}$ (y_1, y_2) построим матрицу $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, и ей ставим в соответствие сначала билинейную симметрическую форму (форма скалярного произведения) как сумму произведений элементов соответствующих строк $в_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = в_1(\mathbf{y},\mathbf{x}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, а затем – билинейную кососимметрическую форму (форма векторного произведения, или площади) как $в_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -в_2(\mathbf{y},\mathbf{x}) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -(y_1 x_2 - y_2 x_1)$. Первую схему обозначим через А и назовем схемой скалярного произведения (или длины, расстояния), а вторую схему обозначим через В и назовем схемой векторного произведения (или внешнего произведения, или площади).

Применим эти схемы для запоминания определенных формул из математического анализа и теории поля, играющих важную роль для решения задач физического характера.

Пусть $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ - координаты некоторого касательного вектора на плоскости и dx,dy – координаты соответствующего ковектора, а P (x,y) , Q (x,y) – непрерывно дифференцируемые по x,y функции. Составим матрицы $\begin{pmatrix} dx & P \\ dy & Q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{pmatrix}$. Первой матрице по схеме A соответствует дифференциальная форма Pdx +Qdy, а второй матрице по схеме B соответствует форма площади $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. Пусть G – односвязная область на плоскости (XOУ) с границей ∂G, гомеоморфной окружности. Тогда интеграл от формы Pdx + Qdy вдоль границы области G равен двойному интегралу от формы площади по G, т.е. имеем известную формулу Грина на плоскости

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (4)$$

Обобщим эти схемы в трехмерном пространстве R^3 . Следует заметить, что первая схема обобщается в евклидовых пространствах любой размерности, а вторая схема – в симплектических пространствах.

Итак, пусть X = $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ - матрица, составленная из координат векторов $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и $y(y_1, y_2, y_3)$. По схеме A матрице X соответствует форма $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, а по схеме B ей соответствует форма с компонентами $A_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, A_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Пусть кривая ∂G с указанным выше условием ограничивает некоторую поверхность F в пространстве R^3 и P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) – непрерывно дифференцируемые по x, y, z функции. По аналогии вышеуказанной процедуры составим матрицы

$\begin{pmatrix} dx & P \\ dy & Q \\ dz & R \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \frac{\partial}{\partial z} & R \end{pmatrix}$. По схеме A первой матрице соответствует дифференциальная форма Pdx + Qdy + Rdz, а второй матрице по схеме B соответствует форма с компонентами $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, т.е. дифференциальная 2–форма – форма площади. Формально эти компоненты получаются вычеркиванием во второй матрице соответственно первой, второй и третьей строк, а затем из оставшихся строк по схеме B составляется форма площади. Окончательно имеем форму

$(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$

Интегрируя дифференциальную форму, полученную по схеме A, вдоль границы поверхности F и дифференциальную форму, полученную по схеме B, по поверхности F, имеем известную формулу Гаусса – Остроградского

$$\int_{\partial F} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_F (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx. \quad (5)$$

Более того, механически формула (5) означает, что циркуляция векторного поля с координатами P,Q,R вдоль замкнутого контура ∂G (или работа силы **F** (P,Q,R) при перемещении точки вдоль ∂G) равна потоку вихря (ротора) с указанными выше компонентами через поверхность G, ограниченную контуром ∂G. Если же ротор обращается в нулевой вектор, то это означает, что соответствующее поле **F** (P,Q,R) является потенциальным. По схеме A второй матрице соответствует скаляр $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, равный дивергенции вектора **F** (P,Q,R). Потенциальное поле с нулевой дивергенцией является соленоидальным.

Замечание. В левых частях равенств (4) и (5) под интегралами стоят дифференциальные 1–формы, а в правых частях – их дифференциалы, т.е. дифференциальные 2–формы. В общем случае связь между ***κ***–формой **Ω** и ее дифференциалом d**Ω** для любого ориентируемого многообразия M с краем ∂M устанавливается формулой Стокса, определяемой в виде

$\int_{\partial \mathrm{M}} \Omega = (-1)^{\kappa+1} \int_{\mathrm{M}} d\Omega.$ (6)

Наконец, рассмотрим некоторые разновидности этих схем. Пусть задана аналитическая функция f(z) = u(x, y) + iv(x, y). Применяя к функциям u(x, y), v(x, y), непрерывно дифференцируемым по x, y в некоторой замкнутой области, схемы A и B относительно матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u \\ \frac{\partial}{\partial y} & v \end{pmatrix}$, в несколько иной форме, получим равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Эти равенства на самом деле определяют условия дифференцируемости функции комплексной переменной f(z). (Их называют уравнениями Коши – Римана или Даламбера – Эйлера.) На основе этих уравнений и формулы Грина доказывается одна из центральных теорем комплексного анализа – интегральная теорема Коши, с помощью которой получаем интегральную формулу Коши. Эта формула, в свою очередь, позволяет разложить аналитическую функцию в ряды Тейлора и Лорана. Тем самым мнемосхемы A и B дают почти полную информацию о содержании основного курса комплексного анализа.

Заключение. Таким образом, мнемосхема, подчиненная определенной логико-конструктивной деятельности, связывающей основные понятия алгебры, геометрии и теории функций, дает возможность более эффективно разрешить проблему структурирования содержания образования того или иного раздела математики в направлении выявления более общих закономерностей и синтеза методов исследования в различных предметных областях знаний. Построение таких схем должно быть ориентировано на развитие комплексного мышления, способствующего формированию у студентов целостно структурированных знаний об окружающем мире и восприятию фрактальных эффектов в нелинейных системах. Мнемосхемы строятся в соответствии с логическими законами метапредметного содержания, и поэтому мнемическая деятельность на самом деле входит в метапредметную деятельность, а под метапредметным содержанием, в свою очередь, понимается освоение универсальных учебных действий, а также универсальных способов мышления и действий, не являющихся специфическими для предметного материала.

Список литературы

1. Балл Г.А. Психологические принципы современного гуманизма // Вопросы психологии. - 2009. - № 6. – С. 3-12.
2. Бехтель Э.Е., Бехтель А.Э. Контекстуальное опознание. – СПб., 2005.
3. Большакова А.Ю. Архетип – концепт – культура // Вопросы философии. – 2010. - № 7. – С. 47-57.
4. Владимиров Ю.С. Метафизика. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. – 568 с.
5. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей. – Омск : Ом ИПКРО, 1993. – 323 с.
6. Иванова Т.В. Педагогические основы культурологической подготовки будущего учителя : дис. … д-ра пед. наук. – Волгоград, 2002. – 536 с.
7. Мещеряков Б.Г., Зинченко В.П. Большой психологический словарь. – СПб., 2004. – 672 с.
8. Монахов В.М. Методология педагогической технологии (аксиоматический подход) // Школьные технологии. – 2001. - № 1. – С. 4–15.
9. Степин В.С. Наука и философия // Вопросы философии. – 2010. - № 8. – С. 58–75.
10. Ярахмедов Г.А. Комплексный подход к математическому образованию в педагогическом вузе: теория и методология : монография. – Махачкала, 2013. – 340 с.

Рецензенты:

Везиров Т.Г, д.п.н., профессор, профессор кафедры методики преподавания математики и информатики Дагестанского государственного педагогического университета, г. Махачкала;
Сурхаев М.А. д.п.н., профессор, профессор кафедры информационных и коммуникационных технологий Дагестанского государственного педагогического университета, г. Махачкала.