

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АВТОТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

Терентьев А.В.

*ФГБОУ ВПО «Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург, Россия (199106, г. Санкт-Петербург, 21-я линия, д. 2)*

В статье рассматриваются три группы решения многокритериальных задач. В основе первой группы заложен принцип сведения многокритериальной задачи к однокритериальной. Вторая группа методов связана с формулированием однокритериальной задачи более высокого уровня управления. Третья группа содержит методы определения множества Парето. В связи с этим интенсивно ведётся разработка методов векторной оптимизации - поиск оптимальных или целесообразных решений многокритериальных задач. В общем случае определение областей Парето в многокритериальных задачах связано с преодолением значительных трудностей. Однако в некоторых ситуациях удается довольно просто находить такие области. В статье рассматривается графоаналитический метод нахождения множества эффективных планов для задачи линейного программирования с одним ограничительным условием и двумя критериями эффективности. Изложенные в статье методы иллюстрируются автотранспортными примерами.

Ключевые слова: многокритериальность, автотранспортное предприятие, весовой коэффициент, иерархичность, система управления, графоаналитический метод, множество Парето.

## METHODS FOR SOLVING MOTOR TASKS

Terentiev A.V.

*National Mineral Resources University (University of Mines), Saint Petersburg, Russia (2, 21 line, Saint Petersburg, 199106, Russia)*

This article discusses three groups of solutions of multiobjective problems. In the first group based on the principle of information multicriteria problem to a one-criterion. The second group of methods is associated with the formulation of one-criterion problem of a higher level of management. The third group includes methods for the determination of the Pareto set. In connection with this intensively conducted to develop methods of vector optimization - search for optimal or feasible solutions of multiobjective problems. In general, the definition of areas Pareto multicriteria problems connected with overcoming significant difficulties. However, in some cases quite possible to find such a region. The article discusses the graphic-analytical method for finding the set of effective plans for a linear programming problem with a restrictive condition and two performance criteria. Set out in Article methods are illustrated examples of transport.

Keywords: multicriteriality, motor company, the weighting factor, hierarchical control system, graphic-analytical method, the Pareto set.

В практических автотранспортных задачах нередко приходится принимать решение не по одному, а сразу по нескольким показателям эффективности. Такие задачи получили название многокритериальных. Выработка количественных рекомендаций в многокритериальных ситуациях связана со значительными трудностями, которые носят объективный характер. Однако приходится принимать решения в условиях многокритериальности. Более того, однокритериальные ситуации в большинстве случаев искусственно получают из многокритериальных. В связи с этим интенсивно ведётся разработка методов векторной оптимизации (поиск оптимальных или целесообразных решений многокритериальных задач). Ряд таких методов излагается ниже.

В основе большинства методов решения многокритериальных задач заложен принцип сведения их к однокритериальным. Для достижения этой цели существует ряд приёмов.

Одним из простейших приёмов сведения многокритериальной задачи к однокритериальной является выделение среди множества показателей эффективности какого-либо одного (самого главного). В дальнейшем оптимизация ведётся по этому единственному критерию, а остальные показатели эффективности ограничиваются сверху или снизу и служат ограничениями.

Пусть, например, необходимо максимизировать  $m$  критериев:

$$k_i \rightarrow \max, i = \overline{1, m} \quad (1)$$

Выбираем среди этих  $m$  критериев главный (например,  $k_j$ ), а остальные ограничиваем снизу величинами  $k_{i0}, i = \overline{1, m}, i \neq j$ . Задача при этом принимает вид:

$$k_j \rightarrow \max, k_i \gg k_{i0}, i = \overline{1, m}, i \neq j \quad (2)$$

При использовании этого способа возникают две трудности. Во-первых, не всегда удаётся выделить среди множества критериев самый главный, а во-вторых, часто не ясно, из каких соображений ограничивать остальные критерии величинами  $k_{i0}$ .

Одним из самых распространённых методов сведения многокритериальных задач к однокритериальным является использование составных критериев. Здесь наблюдаются разные подходы. Иногда максимизируют сумму критериев:

$$K = \sum_{i=1}^m k_i \rightarrow \max, \quad (3)$$

иногда их произведение:

$$K = \prod_{i=1}^m k_i \rightarrow \max \quad (4)$$

В некоторых случаях в составных критериях используют «весовые» коэффициенты. Например:

$$K = \sum_{i=1}^m C_i k_i \rightarrow \max, \quad (5)$$

где  $C_i$  — «вес» (важность)  $i$ -го показателя эффективности. Если часть критериев необходимо максимизировать (например, первые  $q$  критериев), а оставшиеся  $(m-q)$  критериев надо минимизировать, то используют дробь:

$$K = \frac{\prod_{i=1}^q k_i}{\prod_{i=q+1}^m k_i} \rightarrow \max \quad (6)$$

Существуют и другие способы образования составного критерия. Все они имеют общий недостаток: при использовании таких критериев недостаток в одном критерии может быть скомпенсирован за счёт другого. Например, максимизируя сумму критериев, может получиться, что один из них будет иметь маленькое значение, а другой большое. И хотя их сумма будет достаточно велика, полученное решение нельзя считать хорошим.

Все окружающие нас процессы управления представимы в виде многоуровневой иерархической системы. На каждом уровне решаются свои задачи по своим критериям. Информация, выработанная на  $k$ -м уровне, поступает на  $(k+1)$ -й уровень, где используется для решения других задач по другим критериям и т.д. При переходе от уровня к уровню, как правило, сокращается число решаемых задач, но значительно возрастает их важность и сложность. Таким образом, иерархическая система управления напоминает пирамиду, рассечённую множеством плоскостей, параллельных основанию. Каждая из таких плоскостей соответствует определённому уровню управления. В основании этой пирамиды (низший уровень) лежат обычно простейшие задачи оперативного управления.

Критерии задач  $k$ -го уровня должны быть согласованы с интересами  $(k+1)$ -го уровня управления. Это обстоятельство часто помогает при выработке рекомендаций в условиях многокритериальности. Действительно, если в такой ситуации подняться на более высокий уровень, то становится ясным, каким критериям следует отдать предпочтение. Переход на более высокий уровень управления позволяет решить ещё одну проблему – правильную оценку коэффициентов относительной важности в составных критериях.

Рассмотрим теперь методы определения множества Парето.

Пусть необходимо выбрать решение некоторой задачи по двум показателям эффективности:  $k_1$  и  $k_2$  (причем каждый из этих критериев должен быть, по возможности, максимальным, т.е.  $k_1 \rightarrow \max$  и  $k_2 \rightarrow \max$ ). Изобразим все возможные решения этой задачи в виде некоторого замкнутого множества  $M$ , рассматриваемого на плоскости с осями координат  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 1).

Каждая точка множества  $M$  соответствует одному из решений, которое характеризуется значениями критериев  $k_1$  и  $k_2$ . Как видно, некоторые из этих решений очень похожи. Например, решение, отмеченное точкой  $a$ , характеризуется очень маленькими значениями каждого из критериев. Решение, отмеченное точкой  $d$ , лучше решения  $a$  по критерию  $k_1$ , но уступает ему по критерию  $k_2$ . Стремление максимизировать решение по критерию  $k_1$  приводит к выбору точки  $b$ , а максимальное значение критерия  $k_2$  достигается при выборе решения, которому соответствует на рис. 1 точка  $c$ .

Очевидно, что все наилучшие решения расположены на участке дуги  $b - c$ . Действительно, любое другое решение, находящееся вне этой дуги, может быть улучшено по крайней мере по одному показателю (а для большинства решений – сразу по двум). Участок  $b - c$  носит название «множество эффективных планов» или «множество Парето» и характеризуется тем важным свойством, что на нем ни одно решение не может быть улучшено по одному из критериев без ущерба для другого критерия.

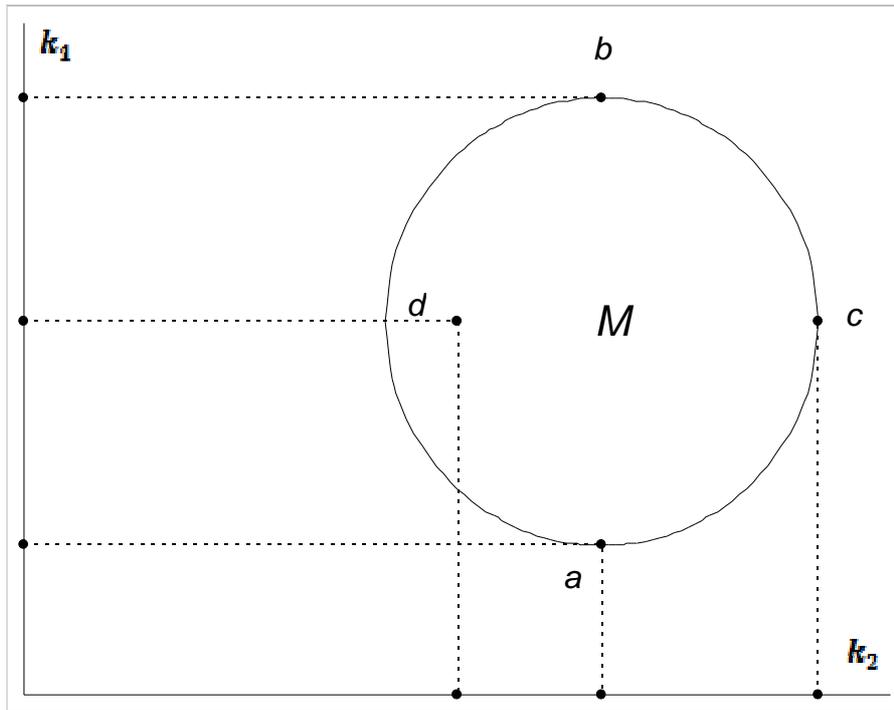


Рис. 1. Множество Парето

В общем случае определение областей Парето в многокритериальных задачах связано с преодолением значительных трудностей. Однако в некоторых ситуациях удается довольно просто находить такие области. Ниже рассматривается графоаналитический метод нахождения множества эффективных планов для задачи линейного программирования с одним ограничительным условием и двумя критериями эффективности:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \rightarrow \max \\ k_2 &= \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n x_j &= N, x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Рассмотрим метод решения задачи (1) на следующем числовом примере:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ k_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1, 3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Задавая последовательно каждой переменной значение 4, получаем три точки треугольника  $ABC$  на плоскости с осями координат  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 2).

Очевидно, что все допустимые решения этого примера находятся внутри треугольника  $ABC$  и на его границах. Очевидно также, что множество эффективных планов (наилучших решений) находится на отрезке  $BC$ .

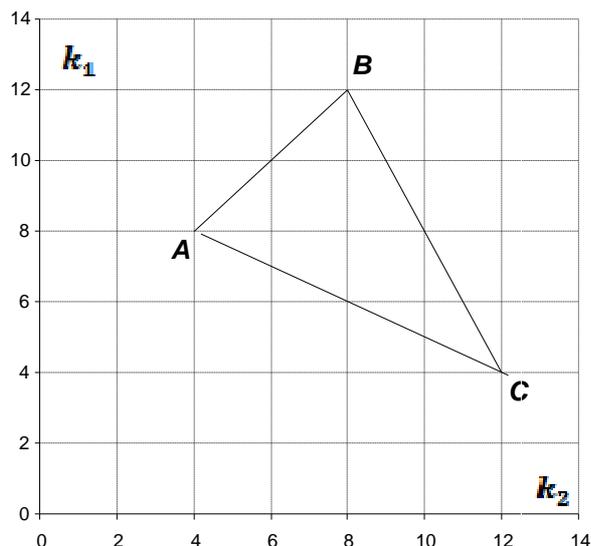


Рис. 2. Множество Парето для задачи (2)

Воспользуемся выражением уравнения прямой, проходящей через две точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

и составим аналитическое выражение, описывающее множество Парето в рассматриваемом примере (иначе говоря, составим уравнение отрезка BC):

$$k_1 + 2k_2 = 28; 4 \leq k_1 \leq 12; 8 \leq k_2 \leq 12$$

Как видно, критерий  $k_1$  может принимать любое значение из замкнутого интервала  $[4; 12]$ . Выбор значения  $k_1$  однозначно определяет значение второго критерия  $k_2$ . Например, если задаться для  $k_1$  значением 10, то  $k_2$  будет равным 9, если  $k_1 = 8$ , то  $k_2 = 10$  и т.д.

В приведенном примере область Парето представляет собой отрезок прямой линии. В общем случае таких отрезков может быть несколько (множество эффективных планов выражается кусочно-линейной функцией). Рассмотрим следующий пример:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \max \\ k_2 &= x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10, x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Присваиваем последовательно каждой переменной значение 10 и вычисляем критерии  $k_1$  и  $k_2$ . При  $x_1=10$ ,  $k_1=70$  и  $k_2=10$ , при  $x_2=10$ ,  $k_1=30$  и  $k_2=20$  и т.д. Полученные точки откладываем на плоскости в осях координат  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 3).

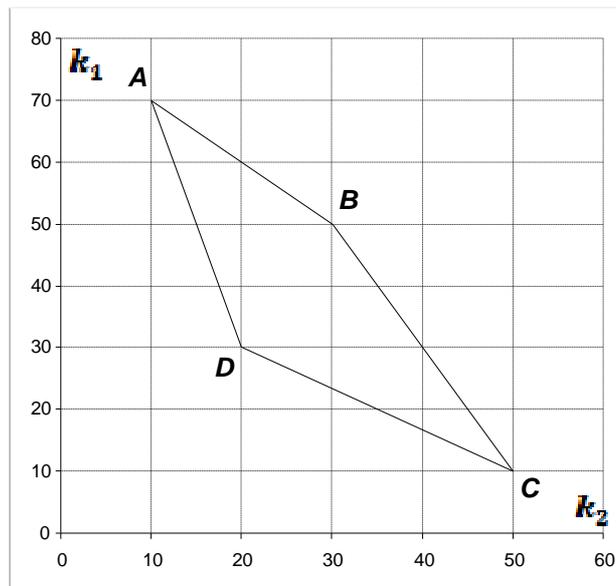


Рис. 3. Множество Парето для задачи (3).

Очевидно, что все допустимые решения примера (3) находятся внутри четырехугольника  $ABCD$  и на его границах, а наилучшие решения – на отрезках  $AB$  и  $BC$ . Составим аналитические выражения, описывающие множества Парето в рассматриваемом примере. Для отрезка  $AB$

$$k_1 + k_2 = 80; 50 \leq k_1 \leq 70; 10 \leq k_2 \leq 30,$$

а для отрезка  $BC$

$$k_1 + 2k_2 = 110; 10 \leq k_1 \leq 50; 30 \leq k_2 \leq 50$$

Как видно, на отрезке  $AB$  полученного множества Парето критерий  $k_2$  не может быть больше 30. Если этого недостаточно, то можно перейти на отрезок  $BC$ . Однако на этом отрезке критерий  $k_1$  не может быть больше 50. В зависимости от степени важности критериев следует предпочтение отдавать тому или иному отрезку множества Парето.

### Список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. — М. : Советское радио, 1972. — 552 с.
2. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. — М. : Советское радио, 1966. — 524 с.
3. ГОСТ Р 53480-2009. Надежность в технике. Термины и определения.
4. Звонов В.А. Оценка жизненного цикла – основа совершенствования АТС / В.А. Звонов, А.В. Козлов, А.С. Теренченко // Автомобильная промышленность. - 2003. - № 11. – С. 9-12.

5. Кисуленко Б.В. Оценка эколого-экономического эффекта / Б.В. Кисуленко, А.С. Теренченко, В.Ф. Кутенёв, А.В. Козлов // Журнал автомобильных инженеров. — 2009. — № 3 (56).
6. Прудовский Б.Д. Количественные методы управления автомобильным транспортом. — М. : Транспорт, 1976. — 88 с.
7. Терентьев А.В., Кацуба Ю.Н., Григорьева Л.В. // Горная механика и машиностроение. - 2013. - № 1. – С. 80-86.
8. Терентьев А.В. Определение количества постов ЕО, ТО и ТР автомобилей «Скания» (Scania) / А.В. Терентьев, Т.К. Екшикеев // Транспортный комплекс в условиях рыночных отношений : сб. науч. трудов. – Ташкент : ТАДИ, 2007. – С. 201-204.
9. Терентьев А.В. Определение производственной программы по техническому обслуживанию и текущему ремонту для подвижного состава иностранного производства // Бюллетень транспортной информации. — М. : ИТАР-ТАСС, 2008. — № 6 (156). — С. 34-36.
10. Фокина О.М. Практикум по экономике и организации (предприятия) : учеб. пособие / О.М. Фокина, А.В. Соломка. – М. : Финансы и статистика, 2008. — 272 с.

**Рецензенты:**

Максаров В.В., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой машиностроения, ФГБОУ ВПО «Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», г. Санкт-Петербург;

Михайлов А.В., д.т.н., профессор кафедры машиностроения, ФГБОУ ВПО «Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», г. Санкт-Петербург.