УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Абрегов М.Х.[1], Бечелова А.Р.[1], Нахушева Ф.М.[1]

[1] *ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Работа посвящена численному методу решения краевой задачи второго рода для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения. В работе также получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Нагруженные дифференциальные уравнения возникают при изучении движения почвенной влаги в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из точечных источников загрязняющее вещество определенной интенсивности. В классе достаточно гладких коэффициентов доказана сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в равномерной метрике со вторым порядком точности по шагу сетки. Основным методом исследования задачи является принцип максимума. С помощью принципа максимума получены априорные оценки в равномерной метрике, откуда следует устойчивость и сходимость схемы.

Ключевые слова: нагруженное линейное дифференциальное уравнение; однозначная разрешимость; численный метод решения.

NUMERICAL METHODS OF SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS LOADED SECOND KIND FOR THE STURM-LIOUVILLE

Abregov M.H.[1], Bechelova A.R.[1], Nakhusheva F.M.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov", Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

The work is devoted to numerical methods for solving boundary value problem for second-order ordinary differential equation loaded. The paper also obtain necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem. Loaded differential equations arise in the study of the movement of soil moisture in control of water quality in the reservoir when coming from point sources of pollutant certain intensity. In a class of sufficiently smooth coefficients prove the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem in the uniform metric to the second order of accuracy for the grid step. The main method of studying the problem is the maximum principle. The maximum principle, a priori estimates in the uniform metric implies stability and convergence of schemes

Keywords: loaded linear differential equation; a unique solution; numerical solution method.

Математические модели, возникающие при изучении ряда прикладных задач, приводят к необходимости решения краевых задач для нагруженного дифференциального уравнения второго рода. Такие примеры можно найти в математической физике, математической биологии и других областях.

В настоящей работе будем изучать численный метод решения задачи

$$\overline{L}u \equiv Lu + m(x)\,u(\xi) = -\,f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$l_0 u \equiv k(0)\,u'(0) = 0, \qquad l_1 u \equiv -\,k(1)\,u'(1) = 0, \tag{2}$$

где $Lu = \left(k(x)\,u'\right)' - g(x)\,u$ - оператор Штурма-Лиувилля, ξ- фиксированная точка интервала (0,1).

В начале установим условия однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть* $k(x) \in C^{(1)}[0,1]$, $f(x), g(x), m(x) \in C^{(0)}[0,1]$, $k(x) \geq c_1 > 0$, $0 < g_0 \leq g(x) \leq \overline{g}$ *и функция* $m(x)$ *такова, что для всех* $x \in [0,1]$

$$m(x) \neq g(x). \tag{3}$$

Тогда решение задачи (1),(2) существует единственно и принадлежит классу $C^{(2)}[0,1]$.

Пусть $p(x)$- решение задачи

$$Lp = -f(x), \qquad l_0 p = 0, \qquad l_1 p = 0, \tag{4}$$

а $\upsilon(x)$ - решение задачи

$$L\upsilon = -m(x), \qquad l_0\upsilon = 0, \qquad l_1\upsilon = 0. \tag{5}$$

В работе [1] методом функции Грина [6] показано, что необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (2) является условие

$$1 - \upsilon(\xi) \neq 0, \tag{6}$$

при этом решение $u(x)$ представляется через функции $p(x)$ и $\upsilon(x)$ в виде

$$u(x) = p(x) + \frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)} \cdot \upsilon(x). \tag{7}$$

Покажем, что условие (3) обеспечивает выполнение (6), т.е. является достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (2). В силу непрерывности $m(x)$ и $g(x)$, (3) означает, что либо $m(x) < g(x)$, либо $m(x) > g(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Введём обозначение

$$\Delta_m = \min_{[0,1]} |g(x) - m(x)| \tag{8}$$

и получим нижнюю оценку выражения $|1 - \nu(\xi)|$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $m(x) < g(x)$. Получим верхнюю оценку наибольшего значения $\upsilon_{\max}$ функции $\upsilon(x)$ на отрезке $[0,1]$. Пусть $x_0 \in (0,1)$ - точка максимума $\upsilon(x)$. Из равенства

$$k(x_0)\,\upsilon''(x_0) + k'(x_0)\,\upsilon'(x_0) - g(x_0)\,\upsilon(x_0) = -m(x_0) \tag{9}$$

в силу $\upsilon'(x_0) = 0$, $\upsilon''(x_0) \leq 0$ [4] следует:

$$\upsilon_{\max} = \upsilon(x_0) \leq \frac{m(x_0)}{g(x_0)}. \tag{10}$$

Если наибольшее значение $\upsilon_{\max}$ достигается на одном из концов отрезка $[0,1]$, то переходя к пределу при $x \to 0+$ $(x \to 1-)$ в (9), получим оценку (10). Тогда

$$1-\upsilon(\xi) \;\geq\; 1-\upsilon_{\max} \;\geq\; 1-\frac{m(x_0)}{g(x_0)} \;=\; \frac{g(x_0)-m(x_0)}{g(x_0)} \geq \frac{\Delta_m}{\overline{g}} > 0. \qquad (11)$$

2. Пусть $m(x) > g(x)$. В этом случае получаем нижнюю оценку наименьшего значения $\upsilon_{\min}$ функции $\upsilon(x)$ на отрезке $[0,1]$: $\upsilon_{\min} \geq \dfrac{m(x_0)}{g(x_0)}$,

откуда находим

$$1-\upsilon(\xi) \;\leq\; 1-\upsilon_{\min} \;\leq\; 1-\frac{m(x_0)}{g(x_0)} \;=\; \frac{g(x_0)-m(x_0)}{g(x_0)} \leq -\frac{\Delta_m}{\overline{g}} < 0. \qquad (12)$$

Далее будем считать, что выполнены условия А:

$$k(x)\in C^{(3)}[0,1],\quad f(x),\, g(x),\, m(x)\in C^{(2)}[0,1],\;\; k(x)\geq c_1>0,\quad 0<g_0\leq g(x)\leq \overline{g}\,.$$

Теорема 2*. Если $k(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $m(x)$ удовлетворяют условию А и выполнено (3), то решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C^{(4)}[0,1]$.*

Для численного решения задачи (1), (2) на отрезке $[0,1]$ введём равномерную сетку $\omega_h=\{x_i=ih,\quad i=0,1,\ldots,N;\quad hN=1\}$. Шаг сетки h выберем меньше половины длины меньшего из отрезков $[0,\xi]$, $[\xi,1]$. Номер s выберем из условия $sh\leq\xi\leq(s+1)\,h$.

Проекции решений задач (1)-(2), (4), (5) на сетку ω_h обозначим u_h, p_h, υ_h соответственно.

Пусть сеточная функция P_i - решение конечно-разностной задачи

$$L_hP\equiv\left(a\,P_{\bar{x}}\right)_x-dP=-\varphi,\quad i=\overline{1,\,N-1}, \qquad (13)$$

$$l_{0h}P\equiv a_1P_{x,0}-0.5h\big(g(0)P_0-f(0)\big)=0,\quad l_{1h}P\equiv a_NP_{\bar{x},N}-0.5h\big(g(1)P_N-f(1)\big)=0,$$

а сеточная функция V_i - решение конечно-разностной задачи

$$L_hV\equiv\left(a\,V_{\bar{x}}\right)_x-dV=-\mu,\quad i=\overline{1,\,N-1}, \qquad (14)$$

$$l_{0h}V\equiv a_1V_{x,0}-0.5h\big(g(0)V_0-m(0)\big)=0,\quad l_{1h}\,V\equiv a_N\,V_{\bar{x},N}-0.5\,h\big(g(1)V_N-m(1)\big)=0,$$

где

$$a_i=k\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right),\quad i=1,2,\ldots,N;\quad d_i=g(x_i),\quad \varphi_i=f(x_i),\quad \mu_i=m(x_i),\quad i=0,1,\ldots,N. \qquad (15)$$

Введём обозначения:

$$l_sP=P_s\,\frac{x_{s+1}-\xi}{h}+P_{s+1}\,\frac{\xi-x_s}{h}, \qquad (16)$$

$$l_sV=V_s\,\frac{x_{s+1}-\xi}{h}+V_{s+1}\,\frac{\xi-x_s}{h}, \qquad (17)$$

и в качестве приближённого решения задачи (1), (2) на сетке ω_h выберем сеточную функцию y:

$$y_i = P_i + \frac{l_s\ P}{1-l_s V}\cdot V_i,\quad i=\overline{0,\ N}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия А и (3). Тогда сеточная функция* y_i, *определённая по формуле (18), сходится при* $h\to 0$ *к решению* $u(x)$ *задачи (1), (2) со вторым порядком точности по шагу* h *в равномерной метрике.*

Доказательство теоремы 3 будет заключаться в получении априорной оценки

$$\|u_h - y\|_{C(\omega_h)} \le Mh^2, \tag{19}$$

где M - положительная постоянная, не зависящая от h. Пользуясь представлением (7) решения $u(x)$, получаем:

$$\|u_h - y\|_{C(\omega_h)} = \left\| p_h - P + \frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\,\upsilon_h - \frac{l_s\ P}{1-l_s V}\cdot V\right\|_{C(\omega_h)} =$$

$$= \left\| p_h - P + \frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\,\upsilon_h - \frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\cdot V + \frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\cdot V - \frac{l_s\ P}{1-l_s V}\cdot V\right\|_{C(\omega_h)} \le$$

$$\le \left\| p_h - P\right\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\right|\cdot\left\|\upsilon_h - V\right\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)} - \frac{l_s\ P}{1-l_s\ V}\right|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} =$$

$$= \left\| p_h - P\right\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\right|\cdot\left\|\upsilon_h - V\right\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi) - l_s\ P - p(\xi)\,l_s\ V + \upsilon(\xi)\,l_s\ P}{(1-\upsilon(\xi))(1-l_s\ V)}\right|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} \le$$

$$\le \left\| p_h - P\right\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-\upsilon(\xi)}\right|\cdot\left\|\upsilon_h - V\right\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi) - l_s\ P}{(1-l_s\ V)}\right|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)\,(\upsilon(\xi) - l_s\ V)}{(1-l_s\ V)(1-\upsilon(\xi))}\right|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} \le$$

$$\le \left\| p_h - P\right\|_{C(\omega_h)} + \frac{1}{|1-\upsilon(\xi)|}\cdot\left\|\upsilon_h - V\right\|_{C(\omega_h)}\cdot\|p\|_C + \frac{1}{|1-l_s\ V|}\cdot|p(\xi) - l_s\ P|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)} +$$

$$+ \frac{|\upsilon(\xi) - l_s\ V|}{|1-l_s\ V|\cdot|1-\upsilon(\xi)|}\cdot\|p\|_C\cdot\|V\|_{C(\omega_h)}. \tag{20}$$

Оценим слагаемые в правой части (20). Как известно [5], конечно-разностные схемы (13) и (14) сходятся к решениям, соответственно, дифференциальных задач (4) и (5) с порядком $O(h^2)$. Следовательно, существуют положительные постоянные $M_{P,1}$ и $M_{V,1}$, что

$$\|p_h - P\|_{C(\omega_h)} \le M_{P,1}\,h^2,\qquad \|\upsilon_h - V\|_{C(\omega_h)} \le M_{V,1}\,h^2 \tag{21}$$

Значения $p(\xi)$ и $\upsilon(\xi)$ аппроксимируются $l_s P$ и $l_s V$ с точностью $O(h^2)$ [3], следовательно, существуют положительные числа $M_{2,P}$ и $M_{2,V}$, не зависящие от h, что

$$|p(\xi)-l_s P| \le M_{2,P}\cdot h^2, \qquad |\upsilon(\xi)-l_s V| \le M_{2,V}\cdot h^2 . \tag{22}$$

Для задачи (4) известна априорная оценка

$$\|p\|_C \le \frac{1}{g_0}\|f\|_C . \tag{23}$$

Из априорной оценки [5] $\|V\|_{C(\omega_h)} \le \left\|\frac{\mu}{d}\right\|_{C(\omega_h)}$, с учётом (10), находим:

$$\|V\|_{C(\omega_h)} \le \frac{1}{g_0}\|m\|_C . \tag{24}$$

Получим нижнюю оценку выражения $|1-l_s V|$.

Пусть $m(x)<g(x)$. В этом случае, в силу (15), $\mu_i<d_i$. Оценим сверху максимальное значение $V_{\max}$ функции V. Если $V_{\max}=V_{i_0}$, где $1\le i_0\le N-1$, то в силу $V_{i_0}\ge V_{i_0+1}, V_{i_0}\ge V_{i_0-1}$, из уравнения (14) получаем оценку $V_{i_0}\le \frac{m(x_{i_0})}{g(x_{i_0})}$. Если $V_{\max}=V_0$, то из левого краевого условия (14) следует оценка $V_0\le\frac{m(0)}{g(0)}$. Если $V_{\max}=V_N$, то из правого краевого условия (14) следует оценка $V_{\max}\le\frac{m(1)}{g(1)}$. Тогда

$$1-l_sV = 1-V_s\frac{x_{s+1}-\xi}{h}-V_{s+1}\frac{\xi-x_s}{h} \ge 1-V_{\max} \ge 1-\frac{m(x_{i_0})}{g(x_{i_0})} \ge \frac{g(x_{i_0})-m(x_{i_0})}{g(x_{i_0})} \ge \frac{\Delta_m}{\bar g}.$$

Пусть $m(x)>g(x)$. В этом случае минимальное значение $V_{\min}$ функции V на сетке ω_h имеет оценку: $V_{\min}\ge\frac{m(x_{i_0})}{g(x_{i_0})}$, где $i_0\in\overline{0,N}$ и, следовательно:

$$1-l_s V \le 1-V_{\min} \le 1-\frac{m(x_{i_0})}{g(x_{i_0})} \le -\frac{\Delta_m}{\bar g}.$$

Таким образом, при условии (3)

$$|1-l_s V| \ge \frac{\Delta_m}{\bar g}. \tag{25}$$

Применяя оценки (11), (12), (21)-(25), из (20) получаем:

$$\|u_h-y\|_{C(\omega_h)} \le M_0\cdot\left[1+\frac{1}{\Delta_m}\cdot\frac{\bar g}{g_0}\left(\|f\|_C+\|m\|_C\right)+\frac{1}{\Delta_m{}^2}\cdot\left(\frac{\bar g}{g_0}\right)^2\cdot\|f\|_C\cdot\|m\|_C\right]\cdot h^2, \tag{26}$$

где $M_0=\max\left(M_{P,1};\ \ M_{V,1};\ \ M_{2,P};\ \ M_{2,V}\right)$.

Из (26) следует утверждение теоремы 3.

При $m(x) \le 0$ выражения $1-\nu(\xi) \ge 1$, $1-l_s V \ge 1$ в силу принципа максимума для задач (5) и (14) соответственно. В этом случае остаются в силе все изложенные выше результаты, и, как следует из (26), $\|u_h - y\|_{C(\omega_h)} = O(h^2)$. Эти результаты аналогичны результатам, полученным в работе $[2]$.

При $m(x) > 0$ может наблюдаться неустойчивость решения задачи (1), (2), в частности если $m(x)$ близко к $g(x)$ во всех точках $x \in [0,1]$ настолько, что $m(x) - g(x) = O(h)$, то $\|u_h - y\|_{C(\omega_h)} = O(1)$, то есть предложенный алгоритм может оказаться не пригодным для решения задачи (1), (2) с требуемой точностью. Выход в этом случае может состоять из решения задач (4) и (5) с более высоким порядком точности, а также в аппроксимации соответствующего порядка значений $p(\xi)$ и $\nu(\xi)$.

Список литературы

1. Абрегов М.Х., Бечелова А.Р. Вторая краевая задача для нагруженного линейного дифференциального уравнения второго порядка // Известия КБНЦ РАН. – 2010. – № 3 (35). – С. 120-126.
2. Алиханов А.А., Березгов А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // ЖВМ и МФ РАН. – 2008. – Т. 48, № 9. – С. 1-10.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и в разностной трактовке // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 3. – С. 534–539.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М. : Наука. – Ч. 1. – 1982. – 684 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983. – 616 с.
6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1980. – 231 с.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М.Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН «Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН», г. Нальчик;

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова», г. Нальчик.