УДК 534.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИЗ СТРУН

Ахтямов А.М.[1,2], Аксенова З.Ф.[2]

[1] *ФГБУН Институт механики Уфимского НЦ РАН им. Р.Р. Мавлютова, Уфа, Россия (450054, Уфа, ул. Проспект Октября, 71), e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru;*
[2]*ФГБОУ ВПО Башкирский государственный университет, Уфа, Россия (450074, Уфа, ул. Заки Валиди, 32), e-mail:aksenovazf@yandex.ru*

Рассматривается механическая система в виде звездного графа из трех ребер-струн с одной общей вершиной. Струны являются однородными и имеют одинаковую длину. Все три тупиковых вершины графа упруго закреплены, причем каждая из струн может быть закреплена пружинками неодинаковой жесткости. На тупиковых вершинах графа также расположены сосредоточенные массы. Вся система колеблется как батут. Подобные системы используются для виброзащиты приборов от ударного воздействия. Они поглощают энергию удара, ограничивают передачу высокочастотных колебаний и обеспечивают изоляцию от внешних ударов и вибраций, которые могут повлиять на точность работы установленного оборудования. Решается задача определения коэффициентов жесткости пружинок по 6 собственным частотам этой механической системы. Показано, что если известные сосредоточенные массы одинаковы, то коэффициенты жесткостей пружинок по 6 собственным частотам находятся не однозначно, а с точностью до перестановок их местами. Если же известные сосредоточенные массы взаимно различны, то коэффициенты жесткости пружинок по 6 собственным частотам находятся однозначно. Найден метод решения этой обратной задачи, доказана устойчивость решения и приведены соответствующие примеры. Полученные результаты необходимы как для проектирования, так и для диагностики виброзащитных систем.

Ключевые слова: виброзащитные системы, собственные частоты, свободные колебания, обратная спектральная задача, звездообразный граф.

IDENTIFICATION OF THE ELASTIC FIXING PARAMETERS OF STRINGS MECHANICAL SYSTEM

Akhtyamov A.M.[1,2], Aksenova Z.F.[2]

[1]*Institute of Mechanics Ufa Scientific Center Russian Academy of Sciences, Ufa, , Russia* (450054, Ufa, street Prospekt Oktyabrya, 71), *e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru;*
[2]*Bashkir State University, Ufa, Russia (450076, Ufa, Street Zaki Validi, 32), e-mail: aksenovazf@yandex.ru*

The mechanical system in the form of a star graph of three edges-strings with a common vertex is considered. Strings are homogeneous and have the same length. All three dead-end vertices are elastically fixed, and each of the strings may be fixed by springs of unequal stiffness. At the dead-end vertices of the graph are also concentrated masses. The entire system varies as a trampoline. Such systems are used for vibroprotection of devices against impact. They absorb impact energy, limit the transfer of high-frequency oscillations and provide insulation from external shocks and vibrations which touch upon the accuracy of the installed equipment. The problem of determining the stiffness coefficients of the springs from 6 natural frequencies of the mechanical system is solved. It is shown that if the known concentrated masses are the same, then the stiffness coefficients of the springs are not found uniquely from 6 natural frequencies. They are not found up to permutations of their places. If known concentrated masses are mutually different, the stiffness coefficients of the springs are found uniquely from 6 natural frequencies. A method of solving this inverse problem is found. A stability of solutions is proved. And relevant examples are given. The obtained results are necessary for the design and for the diagnosis of vibration isolation systems.

Keywords: vibration protection systems, natural frequencies, free oscillations, inverse spectral problem, star-shaped graph.

Спектральные задачи с входящими параметрами в краевые условия возникают при решении многих прикладных задач математической физики [2-4, 8]. В соответствующих обратных задачах восстанавливаются неизвестные коэффициенты в уравнении и краевых условиях [5, 7, 9, 10]. Близкая по результатам работа [1] была посвящена восстановлению трех масс, сосредоточенных на тупиковых концах струнного графа с упругим закреплением, по 7 значениям собственных частот. В [6] рассматривается задача идентификации 6 параметров закрепления графа по 6 собственным значениям, однако при использовании такого же числа собственных значений решение оказывается неединственным. В данной статье в отличие от описанных выше работ восстанавливаются 3 параметра закрепления графа. Показывается единственность идентификации этих параметров по 6 собственным значениям.

Постановка обратной задачи. Рассмотрим граф G в виде звезды из трех ребер-струн с одной общей вершиной графа в нуле (точка О). Длина i-й струны равна l, толщина струн одинаковая. Все три тупиковых вершины графа упруго закреплены. Каждая из струн может быть закреплена пружинками неодинаковой жесткости h_i $(i=1,2,3)$. В местах закрепления подвешены сосредоточенные массы m_i. Известны также первые 6 собственных частот свободных колебаний графа G. Требуется найти жесткости пружинок h_i $(i=1,2,3)$.

На каждом ребре графа G уравнение для собственных функций и частот имеет вид

$$y''(x_i)+\lambda\cdot y(x_i)=0,\ 0\le x_i\le l_i,\ i=1,2,3 \qquad (1)$$

Здесь мы используем в качестве аргумента x_i расстояние от общего узла по оси *OX*$_i$, $0\le x_i\le l_i$, $y(x_i)$ ($i=1,2,\ldots,n$) – прогибы (отклонения от состояния равновесия) i-ой струны, то есть вертикальные смещения с выходом из плоскости начального расположения струнного графа, а s – спектральный параметр.

Считаем, что общая точка О ($x_i=0$, i = 1, 2,…,n) не закреплена каким-либо образом, а является свободной (подвижной).

Условия в общей точке имеют вид :

$$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0), \qquad (2)$$

$$y_1'(0)+y_2'(0)+y_3'(0)=0, \qquad (3)$$

Краевые условия

$$y'(l_i)+\left(h_i-m_i\cdot s^2\right)\cdot y_i(l_i)=0,\ i=1,2,3 \qquad (4)$$

Условию *(2)* соответствуют условия непрерывности, условию *(3)* – баланс сил действующих на общую вершину графа (точку О – узел) со стороны каждой из примыкающих к узлу ребер, условия *(4)* – условия упругого закрепления ребер (струн) с сосредоточенными массами, где h_i – коэффициент жесткости пружины упругого закрепления i-ой вершины ребра, m_i – сосредоточенная масса, прикрепленная к i-ой вершине графа.

В терминах введенных обозначений задачу можно сформулировать следующим образом.

Постановка задачи: *Пусть* h_i *– неизвестны, а* m_i *– известны и попарно различны, длины струн* l_i *попарно одинаковы и равны единице. Требуется найти* h_i *по известному набору собственных значений* s_k *задачи (1)-(4).*

Перед решением этой обратной задачи напомним, как решается прямая задача нахождения собственных значений.

Решением уравнения *(1)* является следующая функция

$$y(x_i) = c_{i1}\cos(s x_i) + c_{i2}\frac{\sin(s\,x_i)}{s} \tag{5}$$

Выведем уравнение для вычисления собственных значений s_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ задачи *(1) – (4)*.

Из (2) и (3) получаем $c_{11} = c_{21} = \ldots = c_{n1} = c = const$, $c_{12} + c_{22} + \ldots + c_{n2} = 0$. Отсюда и из (4) следует, что $-c\cdot s_k\cdot\sin(s_k\cdot l_i) + c_{i2}\cdot\cos(s_k\cdot l_i) + \left(h_i - c_i\cdot s_k{}^2\right)\cdot\left(c\cdot\cos(s_k\cdot l_i) + c_{i2}\cdot\dfrac{\sin(s_k\cdot l_i)}{s_k}\right) = 0$

где $k = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, 3$. Откуда

$$c_{i2} = \frac{c\cdot\left(s_k\cdot\sin(s_k\cdot l_i) - \left(h_i - m_i\cdot s_k{}^2\right)\cdot\cos(s_k\cdot l_i)\right)}{\cos(s_k\cdot l_i) + \left(h_i - m_i\cdot s_k{}^2\right)\cdot\dfrac{\sin(s_k\cdot l_i)}{s_k}}.$$

Знаменатель не обращается в нуль. Поэтому уравнение для вычисления собственных значений задачи *(1) – (4)* имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s_k\,\sin(l_i s_k) - \left(h_i - s_k^2 m_i\right)\cos(l_i s_k)}{\cos(l_i s_k) + \left(h_i - s_k^2 m_i\right)\dfrac{\sin(l_i s_k)}{s_k}} = 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Вернемся теперь к обратной задаче. Уравнение *(6)* представляют собой систему бесконечного числа нелинейных уравнений с n неизвестными h_i (в нашем случае три неизвестных, т.к. $i = 1, 2, 3$). Если все длины струн l_i равны $(l_i = l)$, то будет ровно $n!$ наборов решений (в нашем случае $3! = 6$).

Возникает вопрос: какое конечное число собственных значений нужно знать для однозначной идентификации трех закреплений графа?

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, сведем (6) к системе линейных уравнений. Для этого приведем (6) к общему знаменателю. Нули числителя этой дроби и есть собственные значения задачи (1)-(4). Следовательно, собственные значения задачи (1)-(4) удовлетворяют следующему уравнению (числитель суммы (6) равен нулю):

$$\Delta(s)=x_1 f_1(s)+x_2 f_2(s)+x_3 f_3(s)+x_4 f_4(s)+x_5 f_5(s)+x_6 f_6(s)+f_0(s) \qquad (7)$$

где $f_1(s)=2\cdot s^2\cdot\cos(s)\cdot\sin^2(s)-s^2\cos^3(s)$; $f_2(s)=2s^3\cos^2(s)\sin(s)-s^3\sin^3(s)$;

$$f_3(s)=3\cdot s^2\cdot\cos(s)\cdot\sin^2(s);\quad f_4(s)=3\cdot s^4\cdot\cos(s)\cdot\sin^2(s);\quad f_5(s)=s\cdot\sin^3(s)-2\cdot s\cdot\cos^2(s)\cdot\sin(s);$$

$$f_6(s)=3\cdot\cos(s)\cdot\sin^2(s);\; f_0(s)=3s^6\cos(s)\sin^2(s)m_1m_2m_3+\left(s^4\cos^3(s)-2s^4\cos(s)\sin^2(s)\right)(m_1+m_2+m_3)+ \\ +\left(s^5\sin^3(s)-2s^5\cos^2(s)\sin(s)\right)(m_1m_2+m_2m_3+m_1m_3)+3s^3\cos^2(s)\sin(s); \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= h_1+h_2+h_3;\\
x_2 &= (h_2+h_3)m_1+(h_1+h_3)m_2+(h_1+h_2)m_3;\\
x_3 &= h_2h_3m_1+h_1h_3m_2+h_1h_2m_3;\\
x_4 &= m_1m_2h_3+m_2m_3h_1+m_1m_3h_2;\\
x_5 &= h_1h_2+h_2h_3+h_1h_3;\\
x_6 &= h_1h_2h_3.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Пусть $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ собственные значения задачи *(1)-(4)* подставим их в *(7)*. В результате получим систему шести линейных уравнений от шести неизвестных $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$:

$$x_1 f_1(s_k)+x_2 f_2(s_k)+x_3 f_3(s_k)+x_4 f_4(s_k)+x_5 f_5(s_k)+x_6 f_6(s_k)+f_0(s_k)=0,\ k=1,2,3,4,5,6 \qquad (10)$$

Из правил Крамера следует, что если определитель матрицы

$$D=\begin{vmatrix}
f_1(s_1) & f_2(s_1) & f_3(s_1) & f_4(s_1) & f_5(s_1) & f_6(s_1)\\
f_1(s_2) & f_2(s_2) & f_3(s_2) & f_4(s_2) & f_5(s_2) & f_6(s_2)\\
f_1(s_3) & f_2(s_3) & f_3(s_3) & f_4(s_3) & f_5(s_3) & f_6(s_3)\\
f_1(s_4) & f_2(s_4) & f_3(s_4) & f_4(s_4) & f_5(s_4) & f_6(s_4)\\
f_1(s_5) & f_2(s_5) & f_3(s_5) & f_4(s_5) & f_5(s_5) & f_6(s_5)\\
f_1(s_6) & f_2(s_6) & f_3(s_6) & f_4(s_6) & f_5(s_6) & f_6(s_6)
\end{vmatrix} \qquad (11)$$

системы уравнений *(10)* отличен от нуля, то неизвестные $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ находятся единственным образом по формулам $x_j=\frac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\ldots 6)$, где D_j - определитель матрицы, получаемый заменой j-ого столбца столбцом свободных членов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $s_1, s_2, \ldots s_6$ являются точными собственными значениями краевой задачи *(1)-(4)*, $D\neq 0$ и значения сосредоточенных масс попарно различны, т.е. удовлетворяют условию $(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_1-m_3)\neq 0$, то система (10) имеет единственное решение $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, определяемое по формулам Крамера $x_j=\frac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\ldots 6)$, а значения коэффициентов жесткости пружинок h_1, h_2, h_3 находятся однозначно по формулам *(9)*.

Доказательство:

Согласно правилу Крамера, если определитель матрицы *(11)*, системы уравнений *(10)* отличен от нуля. Поэтому неизвестные $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ находятся единственным образом по формулам $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ ($j = 1, 2, \ldots .6$), где D_j - определитель, получаемый из определителя D заменой j-ого столбца столбцом свободных членов. Покажем теперь, что значения коэффициентов жесткости пружинок h_1, h_2, h_3 также находятся однозначно.

Допустим наряду с решением h_1, h_2, h_3 существует $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{h}_3$. Система *(10)* имеет единственное решение { $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ }. Поэтому *(9)* можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 + h_2 + h_3 = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 \\ x_2 = (h_2 + h_3)m_1 + (h_1 + h_3)m_2 + (h_1 + h_2)m_3 = (\tilde{h}_2 + \tilde{h}_3)m_1 + (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_3)m_2 + (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2)m_3 \\ x_3 = h_2 h_3 m_1 + h_1 h_3 m_2 + h_1 h_2 m_3 = \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 m_1 + \tilde{h}_1 \tilde{h}_3 m_2 + \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 m_3 \\ x_4 = m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_1 m_3 h_2 = m_1 m_2 \tilde{h}_3 + m_2 m_3 \tilde{h}_1 + m_1 m_3 \tilde{h}_2 \\ x_5 = h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 + \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 + \tilde{h}_1 \tilde{h}_3 \\ x_6 = h_1 h_2 h_3 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 \end{cases}$$

Имеем, из трех уравнений системы *(9)* (содержащих только h_i $(i = 1, 2, 3)$) 6 наборов решений, и, учитывая наше допущение, $\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 \\ h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 + \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 + \tilde{h}_1 \tilde{h}_3 \\ h_1 h_2 h_3 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 \end{cases}$ будут следующие 3! наборов решений:{ $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_2, h_3 = \tilde{h}_3$ }; { $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_3, h_3 = \tilde{h}_2$ }; { $h_1 = \tilde{h}_2, h_2 = \tilde{h}_1, h_3 = \tilde{h}_3$ }, { $h_1 = \tilde{h}_2, h_2 = \tilde{h}_3, h_3 = \tilde{h}_1$ }; { $h_1 = \tilde{h}_3, h_2 = \tilde{h}_1, h_3 = \tilde{h}_2$ };{ $h_1 = \tilde{h}_3, h_2 = \tilde{h}_2, h_3 = \tilde{h}_1$ }

Но в системе *(9)* есть еще три уравнения $\begin{cases} (h_2 + h_3)m_1 + (h_1 + h_3)m_2 + (h_1 + h_2)m_3 = x_2 \\ h_2 h_3 m_1 + h_1 h_3 m_2 + h_1 h_2 m_3 = x_3 \\ m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_1 m_3 h_2 = x_4 \end{cases}$.

Проверим все ли наборы решений удовлетворяют этим трем уравнениям системы *(9)*. Например, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_3$, $h_3 = \tilde{h}_2$. Получили 1) $h_2 = h_3$ или $m_2 = m_3$;2) $h_1 = 0$ или $h_2 = h_3$ или $m_2 = m_3$; 3) $m_1 = 0$ или $h_2 = h_3$ или $m_2 = m_3$. Т.е. если $h_2 \neq h_3$, то $m_2 = m_3$. А это противоречит условию теоремы, согласно которому $m_2 \neq m_3$. Аналогичная ситуация при следующих наборах решений. Т.е. если наряду с решением h_1, h_2, h_3 существует решение $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{h}_3$, то $\tilde{h}_1 = h_1$, $\tilde{h}_2 = h_2$, $\tilde{h}_3 = h_3$. Из шести наборов решений последним трем уравнениям удовлетворяет только первый набор решений, в котором тройки h_1, h_2, h_3 и $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{h}_3$ совпадают. Таким образом, при решении обратной задачи на восстановление значений коэффициентов жесткости получаем однозначное решение.

Пример 1. Пусть шесть собственных значения задачи *(1)-(4)* есть следующие значения: s_1=0.9419374665, s_2=1.673848777, s_3=1.876338247, s_4=2.635099364, s_5=3.758863968, s_6= 5.146231313 и известны m_i $(i = 1, 2, 3)$ попарно различны, т.е. удовлетворяют условию: $(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$ $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.5$, $m_3 = 0.6$. Требуется найти h_1, h_2, h_3.

Воспользовавшись системой линейных уравнений *(10)* по формулам Крамера, получим однозначно $x_1 = 5.99999997752987$, $x_2 = 5.80000000289103$, $x_3 =$ 5.10000002458480, $x_4 =$ 1.38000000224032, $x_5 = 11.0000000050655$, $x_5 = 6.00000000977745$. Используя формулы *(9)* коэффициенты жесткости пружинок равны $h_1 = 1.00000001341475$, $h_2 = 1.99999991188333$, $h_3 = 3.00000009681947$

Теорема (устойчивости решения). Если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, существуют $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что $|\tilde{s}_k - s_k| < \delta$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, тогда выполняется неравенство $\left|\tilde{h}_i(s_k) - h_i(s_k)\right| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Эта теорема следует из аналитичности $D(s_k)$ и $D_j(s_k)$.

Предложение 1. Если константы краевой задачи *(1)-(4)* одинаковы $m_i = m$ (i =1,2,3), тогда константы h_i (i =1,2,3) в граничных условиях задачи *(1)-(4)* находятся с точностью до перестановок h_i (i =1,2,3) местами.

Пример 2. Пусть известен следующий набор собственных значений s_1 =0.9309993125, s_2 =1.6259086984, s_3 = 1.9149805237. Известны значения сосредоточенных масс m_i =0.5 (i =1,2,3). Требуется найти значения коэффициенты жесткости h_i (i =1,2,3). Подставив известные значения в *(8, 9, 10, 11)*, получим:{ h_1 = 1.00000, h_2 = 1.99999, h_3 = 3.00000},{ h_1 = 1.00000, h_2 = 3.00000, h_3 = 1.99999},{ h_1 = 1.99999, h_2 = 1.00000, h_3 = 3.00000},{ h_1 = 1.99999, h_2 = 3.00000, h_3 = 1.00000},{ h_1 = 3.00000, h_2 = 1.00000, h_3 = 1.99999},{ h_1 = 3.00000, h_2 = 1.99999, h_3 = 1.00000}.

Предложение 2. Если константы краевой задачи *(1)-(4)* одинаковы $h_i = h$ (i =1,2,3), тогда константы m_i (i =1,2,3) в граничных условиях задачи *(1)-(4)* находятся с точностью до перестановок m_i (i =1,2,3) местами.

Таким образом, в настоящей работе показано, что для однозначной идентификации коэффициентов жесткости пружины h_i $(i = 1, 2, 3)$ по собственным значениям колебаний графа и известному набору сосредоточенных трех масс m_i – достаточно использование шести собственных значений. Для решения задачи предложен метод дополнительных неизвестных.

Выявлено, что если сосредоточенные массы попарно различны, то коэффициенты жесткости пружинок находятся единственным образом. Если значения сосредоточенных масс одинаковы, то коэффициенты жесткости пружинок находятся с точностью до перестановок их местами.

Полученные результаты важны для конструирования виброзащитных систем, а также для диагностики таких систем.

Список литературы

1. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Акустическая диагностика сосредоточенных масс на концах струнного графа с упругим закреплением на концах // Вестник Башкирского университета, — 2014. — Том 19, № 1. — С. 14-18.
2. Ахтямов А. М. О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам одной спектральной задачи // Математические заметки. — 1992. — Т. 51, Вып. 6. — С. 137–139.
3. Ахтямов А. М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевых задач с параметром в граничных условиях // Математические заметки. — 2004. — Т. 75, Вып. 4. — С. 493–506.
4. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 1. — С. 115–119.
5. Мамедов Х. Р. Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях // Сиб. мат. журн. — 1999.— Т. 40, Вып. 2. — С. 281–290.
6. Мартынова Ю. В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Башкирского университета, — 2011. — Т. 6, № 1. — С. 4-10.
7. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Обратная задача для пучка операторов с нераспа- дающимися краевыми условиями // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 425, № 1. — С. 31-33.
8. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в гра- ничных условиях // Труды семинара им. И.Г.Петровского. — 1983. — № 9. — С. 190–229.
9. Mamedov Kh.R., Cetinkaya F., Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition. Bound. Value Probl. — 2013. — Article ID 183. — P. 16, electronic only. http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661.
10. Panakhov E. S., Koyunbakan H., Unal Ic. Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2010. — Vol. 18, No. 1, — P. 173–180

Рецензенты:

Спивак С.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математического моделирования. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Башкирский государственный университет», г. Уфа;

Султанаев Я.Т., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Механика твердого тела». Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии, г. Уфа.