УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Абрегов М.Х.[1], Нахушева Ф.М.[1], Бечелова А.Р.[1]

[1]*«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Работа посвящена численному методу решения краевой задачи третьего рода для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения. В работе также получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Нагруженные дифференциальные уравнения возникают при моделировании различных физических и биологических процессов, в частности, при изучении движения почвенной влаги, задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из точечных источников загрязняющее вещество определенной интенсивности, задача теплопроводности. В классе достаточно гладких коэффициентов доказана сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в равномерной метрике со вторым порядком точности по шагу сетки. Основным методом исследования задачи является принцип максимума. С помощью принципа максимума получены априорные оценки погрешности приближенного решения в равномерной метрике, откуда следует её сходимость к точному решению задачи.

Ключевые слова: нагруженное линейное дифференциальное уравнение; однозначная разрешимость; численный метод решения.

NUMERICAL METHODS OF SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE LOADED THIRD KIND OF STURM-LIOUVILLE

Abregov M.H.[1], Nakhusheva F.M.[1], Bechelova A.R.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov "Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

The work is devoted to numerical methods for solving boundary value problem of the third kind for a loaded ordinary differential equation. The paper also obtain necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem. Loaded differential equations arise when modeling a variety of physical and biological processes, in particular for the study of movement of the soil moisture, quality control problems of water when the water body flows out of point sources, the intensity of a particular pollutant, the problem of heat conduction. In a class of sufficiently smooth coefficients prove the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem in the uniform metric to the second order of accuracy for the grid step. The main method of studying the problem is the maximum principle. The maximum principle, a priori error estimates for approximate solutions in the uniform metric, which implies its convergence to the exact solution of the problem

Keywords: loaded linear differential equation; a unique solution; numerical solution method.

Математические модели, возникающие при изучении ряда прикладных задач, приводят к необходимости решения краевых задач для нагруженного дифференциального уравнения третьего рода. Такие примеры можно найти в математической физике, математической биологии и других областях.

В работе изучен численный метод решения краевой задачи третьего рода для нагруженного оператора Штурма-Лиувилля. Для этой задачи установлены условия однозначной разрешимости.

В настоящей работе будем изучать численный метод решения задачи

$$\overline{L}u \equiv Lu + m(x)\, u(\xi) = -f(x),\ 0 < x < 1, \qquad (1)$$

$$l_0 u \equiv k(0)\,u'(0) - b_1 u(0) = 0, \qquad (2)$$

$$l_1 u \equiv -k(1)\,u'(1) - b_2\, u(1) = 0, \qquad (3)$$

где $Lu \equiv \left(k(x)u'\right)' - g(x)u$ – оператор Штурма-Лиувилля, ξ – фиксированная точка интервала $(0,1)$, b_1 и b_2 – положительные числа. Коэффициент $m(x)$ в уравнении (1) предполагается отличной от нуля хотя бы в одной точке $x \in [0,1]$.

Определим условия однозначной разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема 1. *Пусть* $k(x) \in C^{(1)}[0,1]$, $f(x),\, g(x),\, m(x) \in C^{(0)}[0,1]$, $0 < g_0 \le g(x) \le$ $\le \overline{g}$ *и для всех* $x \in [0,1]$ *выполнено условие*

$$0 \le m(x) < g(x). \qquad (4)$$

Тогда решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит классу $C^{(2)}[0,1]$.

Пусть $p(x)$ и $v(x)$ – решения задач:

$$Lp = -f(x), \quad l_0 p = 0,\; l_1 p = 0, \qquad (5)$$

$$Lv = -m(x), \quad l_0 v = 0,\; l_1 v = 0. \qquad (6)$$

Отметим, что задачи (5), (6) при выполнении условий теоремы 1 однозначно разрешимы и их решения принадлежат классу $C^{(2)}[0,1]$. Как установлено в работе [1], необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1)-(3) является условие

$$1 - v(\xi) \ne 0, \qquad (7)$$

при этом её решение $u(x)$ представляется через решения задач (5) и (6) в виде:

$$u(x) = p(x) + \frac{p(\xi)}{1 - v(\xi)} \cdot v(x). \qquad (8)$$

Покажем, что выполнение условия (4) гарантирует (7), что достаточно для однозначной разрешимости задачи (1)-(3). Введем обозначение

$$\Delta_m = \min_{[0,1]}\left(g(x) - m(x)\right) \qquad (9)$$

и оценим снизу выражение $1 - v(\xi)$. С этой целью получим верхнюю оценку наибольшего значения $v_{\max}$ решения задачи (6) на $[0,1]$. Из принципа максимума [2], [6] для задачи (6) и условий на $m(x)$ следует, что $v(x) > 0$ для всех $x \in [0,1]$. Наибольшее значение функции $v(x)$ не достигается в точках $x = 0$ и $x = 1$ в силу краевых условий.

Пусть $x_0 \in (0,1)$ – точка максимума $v(x)$. Из равенства

$$k(x_0)v''(x_0)+k'(x_0)v'(x_0)-g(x_0)v(x_0)=-m(x_0) \qquad (10)$$

в силу $v'(x_0)=0, v''(x_0)\le 0$ следует [3]:

$$v_{\max}=v(x_0)\le \frac{m(x_0)}{g(x_0)}.$$

Тогда

$$1-v(\xi)\ge 1-v_{\max}\ge 1-\frac{m(x_0)}{g(x_0)}=\frac{g(x_0)-m(x_0)}{g(x_0)}\ge \frac{\Delta_m}{\bar{g}}>0. \qquad (11)$$

Теорема доказана.

Далее будем считать, что выполнены условия B: $k(x)\in C^{(3)}[0,1],\ f(x),$ $g(x),\ m(x)\in C^{(2)}[0,1],\ k(x)\ge c_1>0,\ 0<g_0\le g(x)\le \bar{g}.$

Имеет место

Теорема 2. *Если выполнены условия B и (4), то решение задачи (1)-(3) принадлежит классу* $C^{(4)}[0,1]$.

Перейдем к численному решению задачи (1)-(3). На отрезке [0,1] введем равномерную сетку $\omega_h=\{x_i-ih,\ i=0,1,\dots,N;\ hN=1\}$. Шаг h сетки выберем меньше половины меньшего из отрезков $[0,\xi],\ [\xi,1]$. Номер s выберем из условия $s\,h\le\xi<(s+1)\,h.$

Пусть сеточная функция P_i – решение конечно-разностной задачи

$$L_hP\equiv\frac{1}{h}\left[\frac{P_{i+1}-P_i}{h}-\frac{P_i-P_{i-1}}{h}\right]-d_iP_i=-\varphi_i,\quad i=\overline{1,N-1}, \qquad (12)$$

$$l_{0h}P\equiv a_1\frac{P_1-P_0}{h}-b_1P_0-0{,}5\,h\big(g(0)\,P_0-f(0)\big)=0,$$

$$l_{1h}P\equiv -a_N\frac{P_N-P_0}{h}-b_2P_N-0{,}5\,h\big(g(1)\,P_N-f(1)\big)=0,$$

а сеточная функция V_i – решение конечно-разностной задачи

$$L_hV\equiv\frac{1}{h}\left[\frac{V_{i+1}-V_i}{h}-\frac{V_i-V_{i-1}}{h}\right]-d_iV_i=-\mu_i,\quad i=\overline{1,N-1}, \qquad (13)$$

$$l_{0h}V\equiv a_1\frac{V_1-V_0}{h}-b_1V_0-0{,}5h\big(g(0)V_0-m(0)\big)=0,$$

$$l_{1h}V\equiv -a_N\frac{V_N-V_{N-1}}{h}-b_2V_N-0{,}5\,h\big(g(1)V_N-m(1)\big)=0,$$

где

$$a_i = k\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right),\ i=1,2,\dots,N;\ \ d_i = g(x_i),\ \varphi_i = f(x_i),\ \mu_i = m(x_i),\ i=0,1,\dots,N. \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$l_s P = P_s \frac{x_{s+1}-\xi}{h} + P_{s+1}\frac{\xi - x_s}{h}, \qquad (15)$$

$$l_s V = V_s \frac{x_{s+1}-\xi}{h} + V_{s+1}\frac{\xi - x_s}{h}, \qquad (16)$$

и в качестве приближенного решения задачи (1)-(3) на сетке ω_h выберем функцию y, которая выражается через решения задач (13) и (14) по формуле

$$y_i = P_i + \frac{l_s P}{1-l_s V}\cdot V_i, \quad i=\overline{0,N}. \qquad (17)$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены условия В и (4). Тогда сеточная функция y, определенная по формуле (17), сходится при $h \to 0$ к решению $u(x)$ задачи (1)-(3) со вторым порядком точности по шагу h в равномерной метрике.*

Получим априорную оценку погрешности $u-y$ в равномерной метрике на сетке ω_h. Пользуясь представлением (8) решения $u(x)$ задачи (1)-(3), получаем:

$$\| u-y \|_{C(\omega_h)} = \left\| p - P + \frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\cdot v - \frac{l_s P}{1-l_s V}\cdot V \right\|_{C(\omega_h)} =$$

$$= \left\| p - P + \frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\cdot v - \frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\cdot V + \frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\cdot V - \frac{l_s P}{1-l_s V}\cdot V \right\|_{C(\omega_h)} \le$$

$$\le \| p-P\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\right|\cdot \| v-V\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-v(\xi)} - \frac{l_s P}{1-l_s V}\right|\cdot \|V\|_{C(\omega_h)} =$$

$$= \| p-P\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\right|\cdot \| v-V\|_{C(\omega_h)} +$$

$$+ \left|\frac{p(\xi) - l_s P - p(\xi)\, l_s V + v(\xi)\, l_s V}{(1-v(\xi))\cdot(1-l_s V)}\right|\cdot \|V\|_{C(\omega_h)} \le$$

$$\le \| p-P\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi)}{1-v(\xi)}\right|\cdot \| v-V\|_{C(\omega_h)} + \left|\frac{p(\xi) - l_s P}{1-l_s V}\right|\cdot \|V\|_{C(\omega_h)} +$$

$$+\left|\frac{p(\xi)(v(\xi)-l_sV)}{(1-v(\xi))\cdot(1-l_sV)}\right|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)}\le$$

$$\le\|p-P\|_{C(\omega_h)}+\frac{1}{|1-v(\xi)|}\cdot\|v-V\|_{C(\omega_h)}\cdot\|p\|_C+$$

$$+\frac{1}{|1-l_sV|}\cdot|p(\xi)-l_sP|\cdot\|V\|_{C(\omega_h)}+$$

$$+\frac{|v(\xi)-l_sV|}{|1-v(\xi)|\cdot|1-l_sV|}\cdot\|p\|_C\cdot\|V\|_{C(\omega_h)}. \qquad (18)$$

Оценим слагаемые в правой части (18). Как известно [4], конечно-разностные схемы (12) и (13) сходятся соответственно к решениям дифференциальных задач (5) и (6) с порядком $O\left(h^2\right)$, и, следовательно, существуют положительные постоянные $M_{P,1}$ и $M_{V,1}$, не зависящие от h, что

$$\|p-P\|_{C(\omega_h)}\le M_{P,1}\cdot h^2, \qquad \|v-V\|_{C(\omega_h)}\le M_{V,1}\cdot h^2. \qquad (19)$$

Значения $v(\xi)$ и $p(\xi)$ аппроксимируются l_sV и l_sP соответственно с точностью $O\left(h^2\right)$ [5], то есть существуют $M_{V,2}>0$ и $M_{P,2}>0$, не зависящие от h, что

$$|v(\xi)-l_SV|\le M_{V,2}\cdot h^2, \qquad |p(\xi)-l_SP|\le M_{P,2}\cdot h^2. \qquad (20)$$

Для решения задачи (5) известна априорная оценка:

$$\|p\|_C\le\frac{1}{g_0}\cdot\|f\|_C. \qquad (21)$$

Учитывая (10), из априорной оценки

$$\|V\|_{C(\omega_h)}\le\left\|\frac{\mu}{d}\right\|_{C(\omega_h)}$$

получаем:

$$\|V\|_{C(\omega_h)}\le\frac{1}{g_0}\cdot\|m\|_C\ . \qquad (22)$$

Получим нижнюю оценку выражения $1-l_SV$. Заметим, что в силу (14), $\mu_i<d_i,\ i=\overline{0,N}$. Оценим сверху максимальное значение $V_{\max}$ сеточной функции V. В силу условий на коэффициенты и правую часть задачи (13), для неё имеет место принцип максимума третьей разностной краевой задачи [4], из которой следует, что $V_i>0$. Если

$V_{\max} = V_i$, где $1 \le i \le N-1$, то в силу $V_i \ge V_{i+1}, V_i \ge V_{i-1}$, из уравнения (13) получаем оценку $V_i \le \dfrac{\mu_i}{d_i} = \dfrac{m_i}{g_i}$. Если $V_{\max} = V_0$, то из левого краевого условия (13) следует, что $V_0 \le \dfrac{m(0)}{g(0)}$. Если $V_{\max} = V_N$, то из краевого условия (13) следует, что $V_N \le \dfrac{m(1)}{g(1)}$.

Таким образом, если $V_{\max} = V_i,\ i \in \overline{0,N}$, то

$$V_{\max} \le \frac{m_i}{g_i}.$$

Тогда

$$1 - l_S V \ge 1 - V_{\max} \ge 1 - \frac{m_i}{g_i} = \frac{g_i - m_i}{g_i} \ge \frac{\Delta_m}{\bar{g}} > 0. \qquad (23)$$

Применяя оценки (19)-(23), из (18) получаем:

$$\| u - y \|_{C(\omega_h)} \le M_0 \left[1 + \frac{1}{\Delta_m} \cdot \frac{\bar{g}}{g_0} \left(\| f \|_C + \| m \|_C \right) + \frac{1}{\Delta_m^2} \left(\frac{\bar{g}}{g_0} \right)^2 \cdot \| f \|_C \cdot \| m \|_C \right] h^2, \quad (24)$$

где $M_0 = \max\left(M_{P,1}, M_{V,1}, M_{P,2}, M_{V,2} \right)$.

Из априорной оценки (24) следует доказательство теоремы 3.

При $m(x) \le 0$, в силу принципа максимума для задачи (6), $v(x) \le 0$, и в силу принципа максимума для задачи (13), $l_s V \le 0$. В этом случае $\Delta_m \ge 1$, и, как следует из (24), $\| u - y \|_{C(\omega_h)} = \mathrm{O}\left(h^2\right)$. Аналогичный результат получен в работе [2].

При $m(x) \ge 0$ может наблюдаться неустойчивость решения задачи (1)-(3), а предположенный численный метод может быть непригодным для ее решения с требуемой точностью. Например, если $g(x) - m(x) = \mathrm{O}(h)$ для всех $x \in [0,1]$, то, как следует из оценки (24), $\| u - y \|_{C(\omega_h)} = \mathrm{O}(1)$. В этом случае выход состоит в решении задач (5) и (6) с более высоким порядком точности, чем $\mathrm{O}\left(h^2\right)$, а также в аппроксимации значений $p(\xi)$ и $v(\xi)$ соответствующего порядка.

Список литературы

1. Абрегов М.Х., Нахушева Ф.М. Третья краевая задача для нагруженного линейного оператора Штурма-Лиувилля // Известия КБНЦ РАН, Нальчик. –2013. – №5 (55). – С. 7-12.
2. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. – М.: Мир, 1983. – 200 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982. – 309 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках// Докл. АН СССР. – 1986. – Т.291, №3. – С. 534-539.
6. Protter M.A.,Weinberger H.F. Maximum principles in differential equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М.Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского, г. Нальчик;

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор Высокогорного Геофизического Института, г. Нальчик.