УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Мамедова Т. Ф.[1], Черноиванова Е. А.[2]

[1]*Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, факультет математики и информационных технологий (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, 68), e-mail: mamedovatf@yandex.ru;*
[2]*Саранский кооперативный институт (филиал) АНОО ВО Центросоюза РФ «Российский университет кооперации»,(430027, г. Саранск, ул. Транспортная, 17), elen.chernoivanova@yandex.ru*

В условиях современного широкого использования электрических цепей в различных областях производства и науки является перспективным направление их математического исследования. В представленной статье показывается возможность исследования математических моделей электрических цепей методом асимптотической эквивалентности. Известно, что классификация дифференциальных уравнений на основе асимптотических свойств решений – методологическая основа многих асимптотических методов интегрирования. В негладком анализе такую основу имеют все асимптотические методы. Выбор отношения эквивалентности – главная задача, решение которой на определенном классе уравнений составляет суть конкретного асимптотического метода. Основные результаты по данной тематике были получены Е. В. Воскресенским, представленная работа продолжает исследование в этом направлении и посвящена исследованию проблемы математического моделирования электрических цепей на основе метода сравнения. Научная новизна статьи заключается в том, что показана возможность исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих состояние электрических цепей, методом сравнения как в целом, так и для отдельных компонент решений. В статье сформулирован ряд рекомендаций, позволяющих скорректировать и расширить изучаемые процессы в электрических цепях.

Ключевые слова: покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауеру, уравнение сравнения, принцип Шаудера о неподвижной точке.

THE STUDY OF MATHEMATICAL MODELS OF ELECTRICAL CIRCUITS USING ASYMPTOTIC EQUIVALENCE

Mamedova T.F.[1], Chernoivanova E.A.[2]

[1]*Mordovian state University of N. P.Ogarev, faculty of mathematics and information technologies (430005, Saransk, Bolshevistskaystreet,68), e-mail: mamedovatf@yandex.ru,*
[2]*Saransky Cooperative Institute (branch) in RF Centrosojuz ANOO «Russian University of cooperation» (430027, Saransk, Transportnaya street, 17), elen.chernoivanova@yandex.ru*

In the modern widespread use of electrical circuits in various fields of production and science is a promising direction of their mathematical analysis. The article shows the possibility of the study of mathematical models of electrical circuits using asymptotic equivalence. It is known that the classification of differential equations on the basis of asymptotic properties of solutions - methodological basis of many asymptotic methods of integration. In nonsmooth analysis with this basis are all asymptotic methods. The choice of equivalence relations is the main task, which at a certain class of equations is the essence of a particular asymptotic method. The main results on this topic have been obtained by E. Voskresensky, the present work continues the research in this area and studies the problem of mathematical modeling of electrical circuits on the basis of the comparison method. Scientific novelty of the article is that the possibility to study solutions of nonlinear differential equations describing the state of electric circuits, by comparison, both in General and for individual component solutions. The article formulates a number of recommendations that allows you to adjust and expand the studied processes in electrical circuits.

Keywords: componentwise asymptotic equivalence according to Brower, the equation of comparison, the Schauder principle of a fixed point.

Рассмотрим математическую модель электрической цепи, содержащую выпрямители.

Не теряя общности, рассмотрим цепь вида:

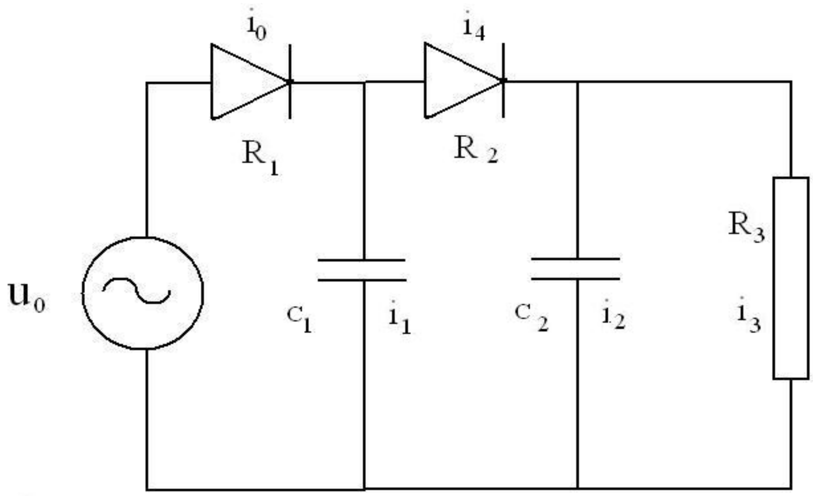

Рис. 1. Электрическая цепь с двумя диодами и двумя конденсаторами

где $R_i(i = 1,2,3)$ – сопротивление элементов цепи,

$C_i(i = 1,2)$ – конденсаторы постоянной емкости,

$i_j(j = 0,4)$ – величины токов на соответствующих участках цепи,

V_j $(j = 1,2)$ – величина напряжения на соответствующем диоде,

$u(t)$ – электродвижущая сила источника.

В этом случае имеет место следующий нелинейный вариант закона Ома:

$$i_j = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Vj}}{\mathrm{R}_+}, & \text{если } \mathrm{Vj} \geq 0, \\ \dfrac{\mathrm{Vj}}{\mathrm{R}_-}, & \text{если } \mathrm{Vj} \geq 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где R_+ и R_- – различные положительные постоянные, соответствующие электрическому сопротивлению диода при протекании через него переменного тока в прямом и обратном направлениях соответственно.

Исследование математической модели для электрической цепи, содержащей два диода и два конденсатора, представляющую собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, было проведено в статье [4].

Запишем систему дифференциальных уравнений для напряжений на конденсаторах в электрических цепях для случая, когда в электрической цепи соединены два диода и два конденсатора по схеме, представленной на рисунке 1 [2],

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) * x_1 + \frac{1}{R_2} x_2 + \frac{1}{R_1} u,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{R_2} x_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) x_2, \qquad (2)$$

или в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x,u), \tag{3}$$

Обозначим через α_i значение $1/R_i$, i=1, 2,3.

В качестве уравнений сравнения выберем уравнения вида:

$$\frac{dy_1}{dt} = -(\alpha_1 + \alpha_2)y_1 + \alpha_2 y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \alpha y_1 - \left(\alpha_2 + \frac{1}{R_3}\right) y_2 \tag{4}$$

или в векторной форме:

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{5}$$

Тогда систему уравнений (2) можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - (Ax - f(t,x,u)),$$
$$\left||-Ax + f(t,x,u)|\right| \leq \max \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2)|x_1| + (\alpha_1 - \beta_2)|x_2| - \alpha_1|u| \\ (\alpha_2 - \beta_2)|x_1| + (\alpha_2 - \beta_2)|x_2| + (\alpha_3 - \beta_3)|x_3| \end{pmatrix} \tag{6}$$

Обозначим оценки компонент вектор-функции так:

$$\lambda_1(t, |x_1|, |x_2|) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2)|x_1| + (\alpha_1 - \beta_2)|x_2| + \alpha_1|u|,$$
$$\lambda_2(t, |x_1|, |x_2|, |x_3|) = (\alpha_2 - \beta_2)|x_1| + (\alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3)|x_2| + (\alpha_3 - \beta_3)|x_3| \tag{7}$$

Запишем фундаментальную матрицу решений системы (4):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ \frac{1}{\alpha_2}(r_1 + \alpha_1 + \alpha_2) * e^{r_1 t} & \frac{1}{2}(r_2 + \alpha_1 + \alpha_2) * e^{r_2 t} \end{pmatrix} \tag{8}$$

и обратную к ней:

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \frac{r_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{r_2 - r_1} e^{-r_1 s} & -\frac{\alpha_2}{r_2 - r_1} e^{-r_1 s} \\ -\frac{r_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{r_2 - r_1} e^{-r_2 s} & \frac{\alpha_2}{r_2 - r_1} e^{-r_2 s} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где:

$$r_1 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2},$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2},$$

причем $r_2 < r_1 < 0$.

Рассмотрим случай, когда напряжение источника $u(t, x_1, x_2)$ представляет собой затухающий колебательный процесс, то есть, будем считать, что $|u(t, x_1, x_2)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Используем результаты статей [3, 5].

Определим для уравнений (2) и (4) множества N и M_0. Очевидно, что $N = \{1,2\}$. Из (7) видно, чтоλ_1 и λ_2 зависят от x_1, x_2, поэтому в качестве M_0 выбираем $M_0 = N = \{1,2\}, N_0 = \emptyset, \overline{M_0} = N$.

Пусть функции сравнения выбраны так:

$\mu_1(t) = 1$,

$$\mu_2(t) = \frac{1}{\alpha_2}\max\left\{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right) + \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2}, 1\right\}, \quad (10)$$

тогда $m_1(t) = \max\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, 1\} = 1$;

$m_2(t) = \max\left\{\frac{1}{\alpha_2}(r_2 + \alpha_1 + \alpha_2)e^{r_1 t}, \frac{1}{\alpha_2}(r_2 + \alpha_1 + \alpha_2)e^{r_2 t}, \mu_2(t)\right\} = \frac{1}{\alpha_2}\left(\left|\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right| + \right.$

$\left. + \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2}\right)$.(11)

Теорема. Если функция $u(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет условиям:

1. Пусть интеграл:

$$\int_t^{+\infty} e^{r_1(t-s)} u(s, c, \varphi_1(s)) ds, \quad (12)$$

где $|\varphi_1(s)| \le \frac{c}{\alpha_2}(|\alpha_1| - \frac{1}{R_3}) + \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2})$, сходится;

2. Все решения уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 - 2(\alpha_2 - \beta_2)c_1 z + \left(2(\alpha_2 - \beta_2) - \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{\alpha_2}\left(\left|\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right| + \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2}\right)c_2 z$$

$$+ \alpha_1 |u(s, c_1, z, c_2, \frac{1}{\alpha_2}(\left|\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right| + \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\alpha_2^2}) z|, t \ge t_0, z_0 \in R^1$$

ограничены,

то уравнения (2) и (4) покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций μ_1, μ_2, при $t \to +\infty$ для всех $c_1, c_2 > 0$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.1.5 [1]. Проверим условие:

$$\mathcal{Y}_1(t)=\int_t^{+\infty}\Big(\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}e^{r_1(t-s)}-\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}e^{r_2(t-s)}((\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)c$$

$$+(\alpha_1-\beta_1)\frac{1}{\alpha_2}\left(\left|\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right|+\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2-4\alpha_2^2}\right)c$$

$$+\alpha_1\left|u\left(s,c,\frac{c}{\alpha_2}\left(\left|\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right|+\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}\right)\right)\right|ds=o(\mu_1),t\to+\infty.$$

Это условие будет выполнено, если

$$\int_t^{+\infty}e^{r_1(t-s)}u\big(s,c,\varphi_1(s)\big)ds<+\infty.$$

Все элементы фундаментальной матрицы ограничены, т.е.

$$\left|y_{ij}(t)\right|\le\frac{1}{\alpha_2}\left(\left|\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right|+\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}\right),\forall\ t\epsilon[t_0,+\infty).$$

Тогда по теореме 1.1.5 [1] уравнения (2) и (4) покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций $\mu_1(t),\mu_2(t)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда напряжение источника $u(t,x_1,x_2)$ лишь только ограниченная функция, то есть $U=\sup|u(t,x_1,x_2)|$. Зафиксируем начальный момент времени $t_0=0$. Будем считать, что при $t_0=0, x_1(t_0)=x_2(t_0)=0$.

Найдем оценку для решений, удовлетворяющих начальными условиями $t_0=0$, $x_1(t_0)=0,x_2(t_0)=0$.

Пусть X – банахово пространство всех ограниченных и непрерывных вектор-функций, определенных на множестве $[0,+\infty)$.

Рассмотрим шар $\Omega=\{x:||x||\le c\},x\le c,x\in X$ и оператор:

$$Lx=Y(t-t_0)x_0+Y(t)\int_{t_0}^{t}Y^{-1}(s)-[Ax(s)+f(s,x(s))]ds,\qquad(13)$$

где $Y(t)$ и $Y^{-1}(S)$ – фундаментальная матрица решения и обратная к ней. Для компонент вектор-функции – $Ax+f(t,x)$ справеливы оценки (6) $x_0=colon\big(x_1(0),x_2(0)\big)$; $||x_0||\le c$.

Тогда имеем:

$$|L(x(t))_1| \leq e^{r_1(t-t_0)}|x_2(0)| + \int_{t_0}^{t} |x_1(s)|(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)(|\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}|\, e^{r_1 t}e^{r_1 s}$$
$$+(\alpha_2-\beta_2)\left(\left|-\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right| e^{r_1 t}e^{-r_1 s}+\left|\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right| e^{r_2 t}e^{-r_2 s}\right)\Bigg)ds$$
$$+\int_{t_0}^{t} |x_2(s)|(\alpha_2-\beta_2)((\left|\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|+\left|-\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right|)\, e^{r_1 t}e^{-r_1 s}$$
$$+(\left|\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|+\left|-\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right|)e^{r_1 t}e^{-r_2 s})ds \qquad (14)$$
$$+\int_{t_0}^{t} \alpha_1\,|u(s,x_1(s)x_2(s))|(\left|\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right| e^{r_1 t}e^{-r_1 s}$$
$$+\left|-\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right| e^{r_1 t}e^{-r_2 s})ds.$$

Принимая во внимание, что $r_2 < r_1 < 0, \alpha_i > \beta_i$ $(i=1{,}2)$ неравенство примет вид:

$$|L(x(t))_2| \leq e^{r_1(t-t_0)}|x_1(t_0)| + e^{r_2(t-t_0)}|x_2(t_0)| + c(2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)\left|\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|$$
$$+2(\alpha_2-\beta_2)\left|\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right| * \left(1-e^{r_2(t-t_0)}\right)+2\alpha_1 U\left|\frac{r_{2+}\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|\left(1-e^{r_2(t-t_0)}\right),$$

или

$$|L(x(t))_2| \leq e^{r_1(t-t_0)}|x_1(t_0)| + e^{r_2(t-t_0)}x_2(t_0)| + 2c\left((\alpha_1-\beta_1)\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right| + 2(\alpha_2-\beta_2)\left(\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|+\left|\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right|\right)\right)\left(e^{r_2(t-t_0)}+1\right)+2\alpha_1 U\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|(1-e^{r_2(t-t_0)}). \qquad (15)$$

Для второй компоненты оператора L справедлива оценка вида:

$$\left|L\big(x(t)\big)_2\right| \leq \frac{1}{\alpha_2}|r_1+\alpha_1+\alpha_2|e^{r_1(t-t_0)}|x_1(t_0)| + \frac{1}{\alpha_2}|r_2+\alpha_1+\alpha_2|e^{r_1(t-t_0)}|x_2(t_0)|$$
$$+2c\left(\frac{(r_2+\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha_2(r_2-r_1)}(\alpha_1-\beta_1+2(\alpha_2-\beta_2)\right) \qquad (16)$$
$$+2\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2(r_2-r_1)}\right|\left(\alpha_2-\beta_2)(1-e^{r_2(t-t_0)}\right)+2|\frac{(r_1+\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha_2|r_2-r_1|}|\alpha_1 c(1-e^{r_2(t-t_0)}).$$

Положим, что $c = U$. Тогда оператор L будет оператором, отображающим шар в шар, то есть $L\colon \Omega \to \Omega$, если будет выполнены условия:

$$(\alpha_1-\beta_1)\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|+2(\alpha_2-\beta_2)\left(\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|+\left|\frac{\alpha_2}{r_2-r_1}\right|\right)$$
$$+\alpha_1\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|\le\frac{1}{2};$$
$$(\alpha_1-\beta_1+2(\alpha_2-\beta_2))\frac{(r_1+\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha_2|r_2-r_1|}+2\left|\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}\right|(\alpha_2-\beta_2)$$
$$+\alpha_1\frac{(r_1+\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha_2|r_2-r_1|}\le\frac{1}{2}. \tag{17}$$

Заменим в (17) выражение для r_1, r_2 через $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, получим:

$$\frac{\alpha_1+2\alpha_2-\frac{1}{R_3}+\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}{\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}\left(2\alpha_1-\beta_1+2(\alpha_2-\beta_2)\right)$$
$$+2(\alpha_2-\beta_2)\frac{\alpha_2}{\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}\le 1; \tag{18}$$

$$\frac{\alpha_1+2\alpha_2+\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}{\alpha_2\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}\left(2\alpha_1-\beta_1+2(\alpha_2-\beta_2)\right)+\frac{\alpha_1+2\alpha_2-\frac{1}{R_3}+\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}{\sqrt{\left(\alpha_1-\frac{1}{R_3}\right)^2+4\alpha_2^2}}$$
$$\le L.$$

Таким образом, с учетом (18), для оператора L при фиксированном t_0 выполняются все условия принципа Шаудера о неподвижной точке, то есть $Lx = x$. Поэтому справедлива оценка для x(t: t_0, x_0):

$$\left|x_1(\mathrm{t}: t_0, x_0)-e^{r_1(t-t_0)}\left|x_1(t_0)\right|e^{r_2(t-t_0)}\left|x_2(t_0)\right|\right|\le U\gamma_2\left(1-e^{r_2(t-t_0)}\right),$$
$$|x_2(\mathrm{t}: t_0, x_0)-\frac{|r_1+\alpha_1+\alpha_2|}{\alpha_2}e^{r_1(t-t_0)}|x(t_0)|$$
$$-\frac{|r_1+\alpha_1+\alpha_2|}{\alpha_2}e^{r_2(t-t_0)}|e^{r_1(t-t_0)}|x_2(t_0)|\le U\gamma_2\left(1-e^{r_2(t-t_0)}\right) \tag{19}$$

при $t \ge t_0$, где γ_1, γ_2 – левые части неравенства (18).

Из оценок (19) можно сделать вывод: если элементы электрической цепи подбирать так, чтобы выполнялось соотношение (18), то падение напряжения на конденсаторах не будет превосходить величины напряжения источника U.

Список литературы

1. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: Теория и приложения. – Саранск: Средневолжское математическое общество, 2001. – 300 с.
2. Зевеке Г. В. Основы теории цепей. – М.: Энергоиздат, 1989. – 528 с.
3. Ляпина А. А, Мамедова Т. Ф. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – Пенза, 2013. – № 3 (27). – С. 48 -57.
4. Мамедова Т. Ф., Черноиванова Е. А. Асимптотические свойства математических моделей электрических цепей // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 1. – С. 114-117.
5. Черноиванова Е. А. Асимптотическая эквивалентность дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16. – № 1. – С. 156-159.

Рецензенты:

Денисов Б. Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры радиотехники Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, г. Саранск;

Щенников В. Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева, г. Саранск.