

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Гарькина И. А., Данилов А. М., Нашивочников В. В.

ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, Россия (440028, Пенза, ул. Германа Титова, 28), e-mail: fmatem@pguas.ru

Предлагается методика оценки имитационных характеристик обучающих комплексов для подготовки операторов транспортных эргатических систем в зависимости от шага интегрирования уравнений движения объекта управления. Интегрирование производится методом Рунге – Кутты второго порядка точности. Обновление начальных условий осуществляется на каждом шаге интегрирования. Производится пошаговое уточнение зависящих от времени параметров объекта управления (аэродинамические коэффициенты, масса и т.д.). Приводятся приближенные методы оценки влияния запаздывания в подсистемах (латентный период моторики оператора, люфты в каналах управления и др.). Производится аналитическая оценка зависимости требуемого шага интегрирования от параметров объекта управления. Определяются максимально допустимые значения шагов интегрирования для различных критериев оценки точности интегрирования. Результаты исследований прошли практическую апробацию при разработке и настройке ряда имитационных моделей объектов эргатических систем.

Ключевые слова: эргатические системы, динамические системы с запаздыванием, имитационное моделирование, шаг интегрирования, зависимость от параметров объекта, приближенные методы оценки

SIMULATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH THE DELAYED

Garkina I. A., Danilov A. M., Nashivochnikov V. V.

Penza state university of architecture and construction (Russia, 440028, Penza, Titov str., 28), e-mail: fmatem@pguas.ru

The methods of estimating the characteristics of simulation training systems for training of operators of transport ergonomics systems depending on the step of integrating the equations of motion of the control object. Integration is performed by the Runge – Kutta method of second order accuracy. Update of initial conditions is performed at each integration step. Stepwise refinement is performed time-dependent parameters of the control object (aerodynamic coefficients, massa, etc.). Are given approximate methods for assessing the impact of the delay in the subsystems (atent period of formation of control actions, backlash in the control channels and others). Is given the analytical assessment of the integration step depending on the parameters of the control object. Are defined the maximum allowable values of integration steps (for different evaluation criteria for the integration). The results of studies have been practically tested in the development and setting up of a number of simulation models of objects ergatic systems.

Keywords: human-machine system, dynamical systems with delay, simulation, integration step, the dependence on the parameters of the object, approximate methods of assessment.

Известно, имитационные характеристики обучающих комплексов по подготовке операторов транспортных систем во многом определяются латентным периодом формирования оператором управляющих воздействий, наличием люфтов в канале управления и др. [4, 7, 8].

Наличие запаздывания усложняет выбор численных методов для имитационного моделирования объекта управления эргатической системы. Действительно, рассмотрим систему второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1(p_1x(t - \tau_1) + p_2y(t - \tau_2)) \\ y'(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2(p_1x(t - \tau_1) + p_2y(t - \tau_2)) \end{aligned} \right\} (t \geq 0)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= S_1(t), \quad t \leq 0; \quad x(+0) = S_1(0), \\ y(t) &= S_2(t), \quad t \leq 0; \quad y(+0) = S_2(0), \end{aligned} \quad (\tau_1, \tau_2 \geq 0).$$

При очень малых τ_1, τ_2 таких, что ими можно пренебречь (достаточная точность интегрирования обеспечивается уже при шаге $h > \max(\tau_1, \tau_2)$), приходим к задаче без запаздывания:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= (a_{11} + b_1 p_1) x(t) + (a_{12} + b_1 p_2) y(t) \\ y'(t) &= (a_{21} + b_2 p_1) x(t) + (a_{22} + b_2 p_2) y(t) \end{aligned} \right\} (t \geq 0);$$

$$x(+0) = S_1(0); \quad y(+0) = S_2(0).$$

При больших запаздываниях шаг интегрирования должен соразмеряться с запаздыванием; при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, можно принять $\tau = mh$, где $m \in \{1, 2, \dots\}$.

В векторно-матричной форме имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad (t \geq 0), \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{S}(t), \quad t \leq 0, \quad \mathbf{x}(+0) = \mathbf{S}(0); \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} b_1 p_1 & b_1 p_2 \\ b_2 p_1 & b_2 p_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_\tau & 0 \\ 0 & T_\tau \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\tau \mathbf{E};$$

$$T_\tau - \text{оператор сдвига: } \mathbf{T}_\tau z(t) = z(t - \tau), \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix}.$$

При $0 \leq t \leq \tau = mh$ задача сводится к определению решения:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{S}(t), \quad \mathbf{x}(+0) = \mathbf{S}(0);$$

возможно уменьшение шага (вместо h принять шаг h^* , где $h = nh^*$, $n \in \{1, 2, \dots\}$;

$$\tau = mh = mn h^*, \quad 0 \leq t \leq \tau = mn h^*).$$

При использовании метода Рунге – Кутты второго порядка точности:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{x}_j + h^* \mathbf{A}\mathbf{x}_j + \frac{(h^*)^2}{2} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_j + h^* \mathbf{Q}\mathbf{S}_{j-mn+\frac{1}{2}} \\ (j &= 0, 1, \dots, mn-1), \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{x}(jh^*), \quad \mathbf{S}_j = \mathbf{S}(jh^*). \end{aligned}$$

При $t \geq \tau = mh$, исходная задача с запаздыванием решается приближенно с шагом h . Здесь метод Рунге – Кутта принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \frac{h^2}{2} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_k + h\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}_{k-m} + \frac{h^2}{2} \mathbf{Q}^2 \mathbf{x}_{k-2m} \quad (k = 0, 1, \dots), \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}(\tau + kh), \quad \mathbf{S}_k = \mathbf{S}(\tau + kh). \end{aligned}$$

В силу непрерывной зависимости корректно поставленной задачи от запаздывания при небольших значениях запаздывания зависимость между шагом h , частотой ω , декрементом затухания $-\sigma/2$ и заданной точностью ε (при фиксировании остальных параметров системы) остается близкой к той зависимости, которая существует для систем

без запаздывания. В остальных случаях для получения требуемых имитационных характеристик обучающего комплекса выбор шага при интегрировании уравнений движения объекта должен осуществляться с учетом величин запаздывания в различных контурах управления. Действительно, рассмотрим моделирование короткопериодической составляющей продольного движения транспортного самолета. В этом случае задача сводится к решению уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ – двумерная вектор-функция, \mathbf{A} – квадратная матрица. Задача определяется шестью параметрами: компонентами матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{x}_0 .

В случае мнимых корней $-\frac{\tilde{\sigma}}{2} \pm i\omega = \frac{\sigma}{2} \pm i\omega$ ($\tilde{\sigma} \geq 0, \omega > 0$) характеристического уравнения решение задачи имеет вид:

$$\mathbf{x} = e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} (\mathbf{p} \cos \omega t + \mathbf{q} \sin \omega t),$$

где \mathbf{p}, \mathbf{q} – линейно независимые векторы.

При приближенном решении численным методом с шагом h для погрешности вычисления методом Рунге – Кутты второго порядка точности справедливо:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}(t_k) = \frac{-1}{24} h^2 f''(\xi_k),$$

где $\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $0 < \xi_k < t_k$.

Так как $\mathbf{f}(t) = \dot{\mathbf{x}}$, то $\mathbf{r}_k = \frac{-1}{24} h^2 \ddot{\mathbf{x}}(\xi_k)$, $0 < \xi_k < t_k$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \left(\mathbf{p} \left(-\frac{\tilde{\sigma}}{2} \cos \omega t - \omega \sin \omega t \right) + \mathbf{q} \left(\omega \cos \omega t - \frac{\tilde{\sigma}}{2} \sin \omega t \right) \right), \\ \ddot{\mathbf{x}} &= e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \left(\mathbf{p} \left(\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{4} - \omega^2 \right) \cos \omega t + \tilde{\sigma} \omega \sin \omega t \right) + \mathbf{q} \left(-\tilde{\sigma} \omega \cos \omega t + \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{4} - \omega^2 \right) \sin \omega t \right) \right), \\ \ddot{\mathbf{x}} &= e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \mathbf{p} \left(\left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma} \omega^2 - \frac{\tilde{\sigma}^3}{8} \right) \cos \omega t + \left(\omega^3 - \frac{3}{4} \tilde{\sigma}^2 \omega \right) \sin \omega t \right) + \\ &+ e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \mathbf{q} \left(\left(\frac{3}{4} \tilde{\sigma}^2 \omega - \omega^3 \right) \cos \omega t + \left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma} \omega^2 - \frac{\tilde{\sigma}^3}{8} \right) \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Очевидно, $\mathbf{p} = \mathbf{x}_0$, $\omega \mathbf{q} - \frac{\tilde{\sigma}}{2} \mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Поэтому в качестве параметров, определяющих систему,

можно взять следующие шесть: $\tilde{\sigma}$, ω и компоненты векторов \mathbf{p}, \mathbf{q} .

С учетом:

$$|\ddot{\mathbf{x}}(t)| \leq e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^3 (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|)$$

получим:

$$|\mathbf{r}_k| \leq \frac{h^2}{24} e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\xi_k} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^3 (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) \leq \frac{h^2}{24} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^3 (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|).$$

Из

$$|\mathbf{r}_k| < \varepsilon$$

следует:

$$h^2 < \frac{24\varepsilon}{(|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^3}.$$

Как видим, при фиксированных компонентах векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} имеем:

$$h^2 < \frac{B}{\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^3}, \quad B = \frac{24\varepsilon}{|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|}$$

и шаг h определяется декрементом затухания $\frac{\tilde{\sigma}}{2}$ и частотой ω (зависимость для $B = 1$ приводится на рис. 1).

В рассматриваемом случае полоса рабочих частот ограничена сверху $\approx 10\text{c}^{-1}$, снизу – $\approx 2\text{c}^{-1}$; безразмерный коэффициент затухания ξ изменяется в пределах от 0,4 до 0,9.

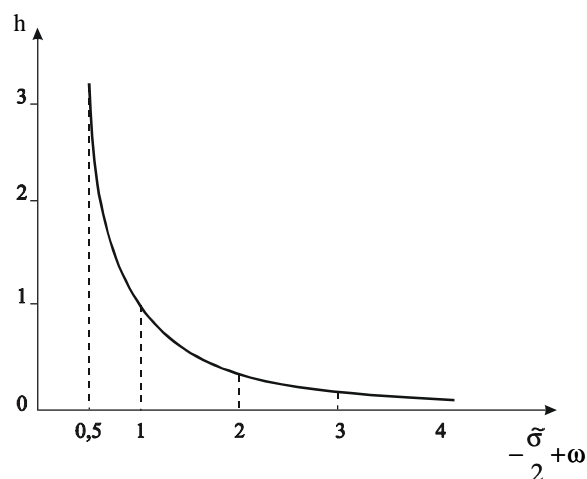


Рис.1. Зависимость шага интегрирования h от $\left(-\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega\right)$

С ростом ξ величина:

$$-\frac{\sigma}{2} + \omega = -\frac{\xi\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \omega = \omega_0(\sqrt{1-\xi^2} - \xi)$$

уменьшается ($\frac{\partial(-\frac{\sigma}{2} + \omega)}{\partial\xi} = -\omega_0\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) < 0$); допустимый шаг h растет с ростом ξ .

Не случайно при настройке тренажеров возникает стремление увеличить коэффициент демпфирования при достаточно больших реальных значениях h (приводит к искажению характеристик самолета: увеличение ξ вызывает соответствующее уменьшение собственной частоты ω). Точка (ξ, ω) в областях равных оценок пилотажных характеристик сдвигается (оценка пилотажных характеристик тренажера улучшается, а соответствие самолета и модели – ухудшается).

Для системы без затухания ($\xi = 0$):

$$h^2 < \frac{B}{\omega^3}.$$

Для отношения максимально допустимых шагов для систем с собственными частотами ω и $\Omega = k\omega$ (оценка сверху) справедливо:

$$\frac{h_\Omega}{h_\omega} = \sqrt{\frac{\omega^3}{\Omega^3}} = \frac{1}{\sqrt{k^3}};$$

В полосе рабочих частот от 2 рад/сек. до 10 рад/сек. допустимый шаг интегрирования изменяется более чем в 10 раз.

Аналогичную оценку для шага h можно получить, исходя из условия:

$$|\mathbf{R}_k| < \delta;$$

$$\mathbf{R}_k = \dot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{A}\mathbf{r}_k = \mathbf{A}\left(-\frac{h^2}{24}\ddot{\mathbf{x}}(\xi_k)\right) = -\frac{h^2}{24}\mathbf{x}^{IV}(\xi_k), \quad 0 < \xi_k < t_k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{IV} = e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \mathbf{p} & \left(\left(\frac{\tilde{\sigma}^4}{16} - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}^2\omega^2 + \omega^4 \right) \cos\omega t + \left(\frac{\tilde{\sigma}^3\omega}{2} - 2\tilde{\sigma}\omega^3 \right) \sin\omega t \right) + \\ & + e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \mathbf{q} \left(\left(2\tilde{\sigma}\omega^3 - \frac{\tilde{\sigma}^3\omega}{2} \right) \cos\omega t + \left(\frac{\tilde{\sigma}^4}{16} - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}^2\omega^2 + \omega^4 \right) \sin\omega t \right); \end{aligned}$$

$$|\mathbf{x}^{IV}(t)| \leq e^{\frac{\tilde{\sigma}}{2}t} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^4 (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|);$$

$$|\mathbf{R}_k| \leq \frac{h^2}{24} e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\xi_k} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^4 (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) \leq \frac{h^2}{24} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega \right)^4 (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|) < \delta.$$

Откуда:

$$h^2 < \frac{24\delta}{(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|)\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega\right)^4} \quad \text{или} \quad h^2 < \frac{C}{\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2} + \omega\right)^4}, \quad C = \frac{24\delta}{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|}.$$

Если $\delta = \varepsilon$, то $C = B$.

Максимальные значения шагов h_ε и h_δ , полученные по условиям $|\mathbf{r}_k| < \varepsilon$ и $|\mathbf{R}_k| = |\dot{\mathbf{r}}_k| < \delta$, соответственно приводятся на рис. 2 (принято $B = C = 1$).

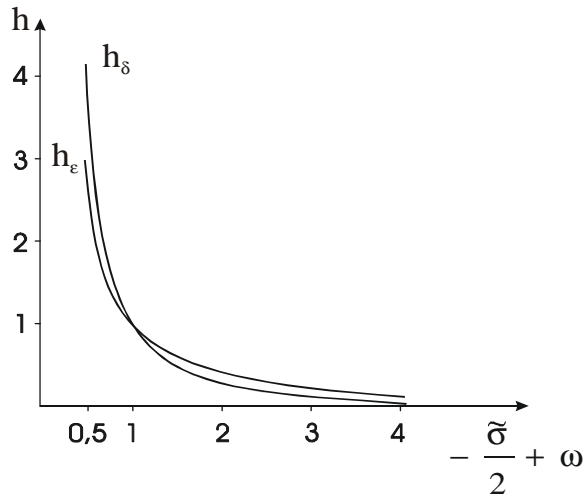


Рис. 2. Зависимость шага интегрирования h от ε и δ

Полученные оценки использовались при разработке имитационных моделей объекта управления транспортной эргатической системы с интегрированием уравнений движения в реальном масштабе времени с обновлением начальных условий и переменных параметров на каждом шаге интегрирования [1...3, 5, 6].

Список литературы

1. Будылина Е. А., Гарькина И. А., Данилов А. М. Приближенные методы декомпозиции при настройке имитаторов динамических систем // Региональная архитектура и строительство. – 2013. – № 3. – С. 150-156.
2. Будылина Е. А., Гарькина И. А., Данилов А. М., Дулатов Р. Л. Структурная и параметрическая идентификация сложных эргатических систем // Фундаментальные исследования. – № 2. – 2015. – С. 919-922.
3. Гарькина И. А., Данилов А. М., Пылайкин С. А. Транспортные эргатические системы: информационные модели и управление // Мир транспорта и технологических машин. – 2013. – № 1 (40). – С. 113-120.

4. Гарькина И. А., Данилов А. М., Пылайкин С. А. Тренажеры и имитаторы транспортных систем: выбор параметров вычислений, оценка качества // Мир транспорта и технологических машин. – 2013. – № 3 (42). – С. 115-120.
5. Данилов А. М., Гарькина И. А., Дулатов Р. Л. Ретроспективная идентификация сложных систем // Региональная архитектура и строительство. – 2015. – № 1(22). – С. 130 -136.
6. Данилов А. М., Лапшин Э. В., Беликов Г. Г., Лебедев В. Б. Методологические принципы организации многопоточной обработки данных с распараллеливанием вычислительных процессов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 4. – С. 26-34.
7. E. Budylna, A. Danilov. Approximation of aerodynamic coefficients in the flight dynamics simulator / Contemporary Engineering Sciences, Vol. 8, 2015, no. 10, 415-420. <http://dx.doi.org/10.12988/ces.2015.5256>.
8. A. Danilov, I. Garkina. Coherence function in analysis and synthesis of complex systems / Contemporary Engineering Sciences, Vol. 8, 2015, no. 9, 375-380. <http://dx.doi.org/10.12988/ces.2015.5236>.

Рецензенты:

Родионов Ю. В., д.т.н., декан автомобильно-дорожного института ПГУАС, профессор, заведующий кафедрой «Эксплуатация автомобильного транспорта», г. Пенза;

Логанина В. И., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Управление качеством и технологии строительного производства» Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, г. Пенза.