УДК 517.984.5

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО КРАТНЫМ СПЕКТРАМ НА МНОГОМЕРНОМ КУБЕ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Дубровский В. В.

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова», Магнитогорск, Россия (455000, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 38), e-mail: vvdubrov@mail.ru

В статье рассматривается задача восстановления возмущающего оператора по кратным спектрам двух краевых задач – задачи Дирихле и задачи Неймана для степени оператора Лапласа. Такого рода задачи в математике называют обратными задачами спектрального анализа. Центральное место в исследовании обратных задач занимают проблемы существования и единственности решения, корректности постановки, а также создания эффективных методов их решения. Обратные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют множество приложений в квантовой механике, геофизике, радиоэлектронике. В настоящее время достаточно полно исследованы обратные спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов, однако для дифференциальных операторов в частных производных, к которым относится оператор Лапласа, такие задачи недостаточно изучены. Решение поставленной в статье задачи строится на основе метода регуляризованных следов и принципа сжимающих отображений.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Лапласа, собственные числа, собственные функции, регуляризованный след.

RESTORATION OF POTENTIAL TO MULTIPLE SPECTRUM ON MULTIDIMENSIONAL CUBE IN INVERSE PROBLEM OF SPECTRAL ANALYSIS

Dubrovsky V. V.

FSBEI HPE «Magnitogorsk State Technical University. named after G. I. Nosov», Magnitogorsk, Russia (455000, Magnitogorsk, street Lenin, 38), e-mail: vvdubrov@mail.ru

The article deals with the problem of reconstructing the disturbance operator to multiple spectra of two boundary value problems - Dirichlet and Neumann problem for the powers of the Laplace. Such problems in mathematics is called inverse problems of spectral analysis. Central to the study of inverse problems are problems of existence and uniqueness of solutions, the correct setting, and the development of effective methods to solve them. Inverse problems play a fundamental role in various areas of mathematics and have many applications in quantum mechanics, geophysics, radio electronics. Currently adequately investigated inverse spectral problems for ordinary differential operators, but for differential operators in partial derivatives, which include the Laplace operator, such tasks are not well understood. The solution of the problem in the article is based on the method of regularized traces and the contraction mapping principle.

Keywords: inverse problem, Laplacian, eigenvalues, eigenfunctions, regularized trace.

Под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления оператора по его заданным спектральным характеристикам, к которым можно отнести спектры, спектральную функцию, данные рассеяния. Подобным вопросам для различных операторов посвящен ряд работ таких известных математиков как В. А. Амбарцумян, В. А. Марченко, А. И. Прилепко, В. А. Садовничий, В. А. Юрко и др. [1, 8, 10] Наиболее исследована обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля [6]. Впервые обратная задача для оператора Лапласа с потенциалом была поставлена Ю. М. Березанским [1].

Среди публикаций, относящихся к обратным задачам спектрального анализа для операторов с дискретным спектром, можно отметить работы Академика РАН В. А. Садовничего, В. В. Дубровского и их учеников [2–4, 7–9]. В настоящей работе получен результат для степени возмущенного оператора Лапласа на многомерном кубе с неядерной резольвентой.

Постановка задачи

Пусть $Q_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid 0 \le x_j \le a,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ – n-мерный куб, где сторона куба $a > 0$.

В сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2(Q_n)$ рассмотрим следующие операторы:

1) оператор T_1, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v,\quad v\big|_{\partial Q_n} = 0,$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 / \partial x_j^2$ – оператор Лапласа, ∂Q_n – граница куба Q_n;

2) оператор T_2, порожденный краевой задачей Неймана:

$$-\Delta v = \lambda v,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\partial Q_n} = 0,$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 / \partial x_j^2$, η – нормаль к границе ∂Q_n куба Q_n.

Введем оператор $T_i^\beta = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $i = 1, 2$, $E(\lambda)$ – спектральное разложение единицы операторов T_i, $\beta \ge n/2$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Собственным числам $\lambda_m = \sum_{j=1}^{n} \left(\pi^2 m_j^2 a_j^{-2}\right)^\beta$ оператора T_i^β соответствуют ортонормированные в H собственные функции $v_m(x) = \sqrt{\frac{2^n}{V}} \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\pi m_j x_j a^{-1}\right)$ при $i = 1$, и $v_m(x) = \sqrt{\frac{2^n}{V \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \delta_{m_j,0}\right)}} \prod_{j=1}^{n} \cos\left(\pi m_j x_j a^{-1}\right)$ при $i = 2$, где m – мультииндекс $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j \in \mathrm{N}$, $j = \overline{1, n}$, $V = a^n$, $\delta_{m_j,0}$ – символ Кронекера.

Будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа и собственные функции оператора T_i^β через $\lambda_t^{(k)}$ и $v_{t,i}^{(k)}$ соответственно, где $t \in \mathrm{N}$, $k = 1, 2, \ldots, \kappa_t$, κ_t – кратность собственного числа λ_t, т.е. $\lambda_t = \lambda_t^{(k)}$, $i = 1, 2$.

Введем аналитические, ограниченные по модулю (но не в совокупности) в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$ функции f_t :

$$f_t(\lambda)=A_t\left(\frac{e^{-\lambda}-1}{\lambda}\right)^2\left(\prod_{j=1,\, j\neq t}^{\infty}\frac{\lambda_j-\lambda}{\lambda_j+\lambda}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-e^{-\lambda}e^{-\lambda_k}\right),$$

где нормирующие множители $A_t\neq 0$ выбраны из условия $f_t(\lambda_t^{(k)})=1$, $t=\overline{1,\infty}$. Очевидно, что $f_t(\lambda_j)=\delta_{tj}$, где δ_{tj} – символ Кронекера. Положим $\beta_t=\sup\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda>0}\left(|\lambda|^2\left|f_t(\lambda)\right|\right)$ и пусть $g_t(\lambda)=\int\limits_0^{\lambda}f_t(z)dz$. Очевидно также, что $\lambda_t^{(k)}\leq\beta_t<\infty$, $t=\overline{1,\infty}$.

Введем следующие обозначения: $R(\lambda)=\left(T_i^{\beta}-\lambda E\right)^{-1}$– резольвента оператора T_i^{β}, $a_t=(\lambda_{t+1}+\lambda_t)/2$, $r_t=\min\left\{\left|\lambda_t^{(k)}-\lambda_{t-1}^{(k)}\right|/2;\left|\lambda_{t+1}^{(k)}-\lambda_t^{(k)}\right|/2\right\}$, $\Gamma_t=\left\{\lambda\in C:|\lambda|=\lambda_t^{(k)}+r_t\right\}$ – вертикальные прямые. Зафиксируем некоторое $r_0>0$ и из последовательности $\left\{\lambda_t^{(k)}\right\}_{t=1}^{\infty}$ выберем максимальную подпоследовательность чисел $\left\{\lambda_{t_l}^{(k)}\right\}_{l=1}^{\infty}$, для которых выполняется неравенство $r_0\leq 2^{-1}\inf\limits_{t\in\mathrm{N}}\left|\lambda_{t_{l+1}}^{(k)}-\lambda_{t_l}^{(k)}\right|$. Объекты, связанные с числом r_0, в дальнейшем будем обозначать с использованием верхнего индекса r_0.

Пусть $\Omega_t=\left\{\lambda\in C:\left|\lambda-\lambda_t^{(k)}\right|\geq r_t\right\}$, $t\in N$, $\Omega=\bigcap\limits_{t=1}^{\infty}\Omega_t$, $R=\max\limits_{\lambda\in\Omega_t}\|R(\lambda)\|_2$, $\|\cdot\|_2$ – абсолютная операторная норма (для оператора Гильберта – Шмидта). Заметим, что $\Gamma_t\subset\Omega$. Хорошо известна [5] асимптотика собственных чисел оператора T_i^{β}, при $t>>1$: $\lambda_t\sim C_1t^{2\beta/n}$ ($C_1=const$, $C_1>0$), поэтому при $\beta\geq n/2$ ряд $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\left|\lambda_t^{(k)}-\lambda\right|^{-2}<\infty$ и оператор $R(\lambda)$, где $\lambda\in\Omega$, суть оператор Гильберта – Шмидта, причем имеет место неравенство: $\|R(\lambda)\|_2^2\leq\|R(r_0)\|_2^2<\infty$, $\forall\lambda\in\Omega$, $\forall t\in N$.

Рассмотрим комплекснозначную функцию $p\in F=L_{\infty}^{r_0}(Q_n)$, где $L_{\infty}^{r_0}(Q_n)$ – пространство измеримых на Q_n, ограниченных в существенном функций, обладающую следующими свойствами:

$$p(a_1-x_1,x_2,\ldots,x_n)=p(x_1,a_2-x_2,\ldots,x_n)=p(x_1,\ldots,a_n-x_n)=p(x_1,\ldots,x_n),\qquad(1)$$

$$\int\underset{Q_n}{\ldots}\int p(x_1,\ldots,x_n)\prod_{j=1}^{n}\cos\left(2\pi m_jx_ja^{-1}\right)dx_1\ldots dx_n=0,\quad\prod_{j=1}^{n}m_j=0,\ m_j=\overline{0,\infty},\qquad(2)$$

$$\|p\|_F\leq r_0/2.\qquad(3)$$

($\|p\|_F=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in Q_n}|p|$). Функцию p часто называют *потенциалом*.

Обозначим через M – множество функций из пространства $L_\infty^{r_0}(Q_n)$, обладающих свойствами (1) – (3), а через P обозначим оператор умножения на рассмотренную выше функцию $p \in F$.

Поставим цель – зная собственные числа операторов T_i^β, $T_i^\beta + P$ и некоторые дополнительные условия на функцию p, доказать существование и единственность потенциала p во множестве M.

Результаты исследования

Теорема. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_l^{(k)}\}_{l=1}^\infty$ *существует подпоследовательность* $\{c_t\}_{t=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ *такая, что выполняются следующие неравенства:*

(i) $$\omega := 2^{n-1} r_0 \; R^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta_t}{c_t} < 1,$$

(ii) $$\sum_{t=1}^{\infty} \left| \sum_{|\xi_j| < c_t} \sum_{k=1}^{\kappa_t} g_t\left(\xi_j^{(k)}\right) - \sum_{\lambda_j < c_t} \sum_{k=1}^{\kappa_t} g_t\left(\lambda_j^{(k)}\right) \right| \le \frac{r_0}{2^{n+1}} (1 - \omega),$$

то во множестве M *существует потенциал* p, *такой, что для любого натурального* t *имеет место равенство:*

$$\sum_{|\mu_j^{(k)}| < c_t} \sum_{k=1}^{\kappa_t} g_t\left(\mu_j^{(k)}\right) = \sum_{|\xi_j^{(k)}| < c_t} \sum_{k=1}^{\kappa_t} g_t\left(\xi_j^{(k)}\right),$$ *где* $\{\mu_t^{(k)}\}_{t=1}^\infty = \sigma\left(T_i^\beta + P\right)$ – *спектр оператора* $T_i^\beta + P$.

Доказательство теоремы, также как и в работах [2, 4, 7], заключается в конструировании сжимающего оператора $A:\ M \subset F \to F$, определяемого равенством:

$$Ap = \alpha_0 - \alpha(p), \tag{4}$$

где $$\alpha_0 = 2^n \sum_{t=1}^{\infty} \left[\sum_{|\xi_j| < c_t} g_t(\xi_j) - \sum_{\lambda_j < c_t} g_t(\lambda_j) \right] \prod_{j=1}^{n} \cos\left(2\pi m_j x_j a^{-1}\right),$$

$$\alpha(p) = 2^n \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t(p) \prod_{j=1}^{n} \cos\left(2\pi m_j x_j a^{-1}\right),$$ и $$\alpha_t(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} g_t(\lambda) Sp\left[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2\right] d\lambda,$$

$Sp\left[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2\right]$ – регуляризованный след оператора $R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2$.

Далее доказывается, что оператор (4) является сжимающим на множестве M:

$$\|Ap_1 - Ap_2\|_F \le \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\|_F = \sqrt{V} \sum_{t=1}^{\infty} \left|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)\right| \operatorname*{ess\,sup}_{(x_1,\dots,x_n) \in Q_n} \left| \prod_{j=1}^{n} \cos\left(2\pi m_j x_j a^{-1}\right) \right| \le$$

$$\le 2^{n-1} r_0 R^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta_t}{c_t} \|p_1 - p_2\|_F = \omega \|p_1 - p_2\|_F .$$

Поскольку выбор подпоследовательности $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ из последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничен лишь неравенством (i), то ее всегда можно выбрать так, чтобы число $\omega = 2^{n-1} r_0 R^2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta_t}{c_t}$ было меньше 1.

Итак, согласно принципу сжимающих отображений С. Банаха уравнение $p = \alpha_0 - \alpha(p)$ во множестве M имеет единственное решение.

Замечание. Последовательность $\{\xi_l^{(k)}\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (ii) существует.

Заключение

Таким образом, в работе доказана теорема о существовании и единственности симметричного потенциала, восстановленного по кратным спектрам двух краевых задач возмущенной степени многомерного оператора Лапласа с неядерной резольвентой.

Список литературы

1. Березанский Ю. М. Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // ДАН СССР. – 1979. – Т. 105. – № 2. – С. 197-200.
2. Дубровский В. В., Дубровский В. В. (мл.) К теореме существования решения обратной задачи спектрального анализа // Успехи математических наук. – 2001. – Т. 56. – Вып. 1. − С. 161-162.
3. Дубровский В. В. (мл.) Обратная спектральная задача для возмущенного оператора оператора Лапласа, порожденного краевой задачей Неймана // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования: материалы 70-й межрегиональной научно-технич. конф. – Т.1. – Магнитогорск: МГТУ им. Г. И. Носова, 2012. – С. 9-12.
4. Дубровский В. В. (мл.) Обратные задачи спектрального анализа для некоторых дифференциальных операторов в частных производных // дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 26.05.06: утв. 14.07.06. – Магнитогорск., 2006. — 121 с.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – Т. 1. – М.: ГТТИ, 1933. – 476 с.
6. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Навукова думка, 1977. – 350 с.

7. Садовничий В. А., Дубровский В. В., Дубровский В. В. (мл.) Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике // Доклады РАН. – 2001. – Т. 377. – № 3. – С. 310-312.
8. Садовничий В. А., Дубровский В. В., Смирнова Л. В. О единственности решения обратных задач спектрального анализа // Доклады РАН. – 2001. – Т. 370. – № 3. – С. 319-321.
9. Седов А. И., Дубровский В. В. (мл.) Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой // Электромагнитные волны и электронные системы. – Т.10. – № 1–2. – 2005. – С.4-9.
10. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. – Саратов: Изд-во СГПИ, 2001. – 499 с.

Рецензенты:

Кадченко С. И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, ФГБОУ ВПО «МГТУ им. Г. И. Носова», г. Магнитогорск;

Кузнецов В. А., д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики № 1, ФГБОУ ВПО «МГТУ им. Г. И. Носова», г. Магнитогорск.