УДК 517.9

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Ефимова Г.Ф., Шмелёва Н.Г.

Филиал ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» в г. Стерлитамак, г. Стерлитамак, Россия. E-mail: shmelyova-2010@yandex.ru

Основным направлением работы является обоснование однозначной разрешимости решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с вещественным параметром при условии, что эллиптическая часть границы области при подходе к линии изменения типа оканчивается сколь угодно малыми дугами полуокружности. При доказательстве существования решения поставленной задачи применяется интегральное представление, полученное в работах И.Н. Векуа, В.И. Жегалова, К.Б. Сабитова, и используется метод сведения краевых задач к сингулярному интегральному уравнению, которое методом регуляризации Карлемана-Векуа сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. При доказательстве единственности решения краевой задачи используются: 1) принцип экстремума для эллиптических систем второго порядка; 2) метод введения новой функции и новой переменной; 3) преобразование Лапласа на линии изменения типа. Полученные результаты являются новыми и имеют теоретический характер. Они могут быть использованы при дальнейшей разработке теории краевых задач для уравнений смешанного типа, и были представлены в виде докладов на научных конференциях.

Ключевые слова: обобщенная задача Трикоми, уравнения смешанного типа, краевые задачи, интегральное представление, однозначная разрешимость, доказательство, теорема, функции.

THE GENERALIZED PROBLEM OF TRICOMI FOR EQUATION OF MIXED TIPE

Efimova G.F., Shmeleva N.G.

Ranch Ufa State Aviation Technical University (453104, Sterlitamak, street Chemists 21). E-mail: shmelyova-2010@yandex.ru

The main focus of the study is unique solvability of generalized solutions of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bicadze with real parameter, provided that the elliptic part of the boundary line at the approach to change the type of ends arbitrarily small semicircle arcs. To prove the existence problem is solved using the integral representation obtained in IN Vekua, VI Zhegalova, KB Sabitova used and the method of reducing boundary problems to a singular integral equation, which is the method of regularization Carleman-Vekua reduced to a Fredholm integral equation of the second kind .In the proof of uniqueness of the solution of the boundary value problem are used: 1) extremum principle for second order elliptic systems; 2) the method of introducing new features and a new variable; 3) the Laplace transform on the line type change. The results obtained are new and have a theoretical character. They can be used in the further development of the theory of boundary value problems for equations of mixed type, and were presented in the form of presentations at scientific conferences.

Keywords: the generalized Tricomi equation of mixed type, boundary value problems, integral representation, the unique solvability of the proof, the theorem, the function.

В силу прикладной важности теория уравнений смешанного типа является одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В работе И.Н. Векуа [3, с.69] в области $D \in R^2$, звездной относительно начала координат, получена формула

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt, \qquad (1)$$

связывающая все регулярные (дважды – непрерывно дифференцируемые) решения метагармонического уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \qquad (2)$$

где λ – числовой параметр с гармоническими функциями $u_0(x, y)$, то есть решениями в D уравнения Лапласа

$$u_{0xx} + u_{0yy} = 0. \qquad (3)$$

В.И. Жегалов [5], К.Б. Сабитов [7] каждому регулярному решению уравнения с комплексным параметром

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0 \qquad (4)$$

сопоставили регулярное решение $u_0(x, y)$ уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{0xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{0yy} = 0 \qquad (5)$$

в области D через интегральное представление

$$u(x, y) = u_0(x, y) - \int_0^1 u_0(xt, yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda(x^2 + \operatorname{sgn} y \cdot y^2)(1-t)}]dt \qquad (6)$$

и указали метод сведения решения краевых задач для уравнения (4) к соответствующим задачам для уравнения (5). Там же получена теорема единственности решения задачи Трикоми для уравнения (4) при $\lambda < 0$.

В исследованиях К.Б. Сабитова, Н.Г. Шмелёвой [8,9] проверена справедливость интегрального представления (6) решений уравнения (4) с комплексным параметром λ и доказана его обратимость, а также получена теорема единственности решения задачи Трикоми и доказана теорема существования решения задачи Трикоми при более слабых ограничениях на граничные данные. Также указаны приложения интегрального представления решений уравнения (4) при решении задачи Франкля для этого уравнения.

В данной работе нами рассмотрено применение указанного метода к решению обобщенной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с вещественным параметром (4).

п.1. Рассмотрим уравнение (4), где $\lambda \in R$ в области D_k, ограниченной кривой Ляпунова Г, лежащей в полуплоскости *y>0*, с концами в точках *A=(0,0)* и *B=(1,0)*, и при *y<0* прямой AC_k *(kx+y=0, 0<k<1)*, и характеристикой $C_k B$ *(x-y=1)*.

Пусть $D_{k+} = D_k \cap \{y > 0\}$, $D_{k-} = D_k \cap \{y < 0\}$.

Обобщенная задача Трикоми. *Найти функцию u(x,y), удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}_k) \cap C^1(D_k) \cap C^2(D_{k+} \cup D_{k-}); \qquad (7)$$

$$Lu(x,y)\equiv 0\,,\quad (x,y)\in D_{k+}\cup D_{k-}\,; \tag{8}$$

$$u(x,y)\big|_{\Gamma}=u(x(s),y(s))=\varphi(s)\,,\quad 0\le s\le l\,, \tag{9}$$

где x=x(s), y=y(s) – параметрические уравнения кривой Γ, s – *длина дуги отсчитываемая от точки B, l – длина кривой* Γ;

$$u(x,y)\big|_{AC}=u(x,-kx)=\psi(x)\,,\quad 0\le x\le\frac{1}{1+k}\,, \tag{10}$$

где 0<k<1, $\varphi(0)=\psi(0)$, $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Определение 1. *Под регулярным в области* D_k *решением уравнения* (4) *понимается функция u(x,y), удовлетворяющая условиям* (7) *и* (8) *обобщенной задачи Трикоми, и, кроме того, производные* u_x, u_y *непрерывны в* $\overline{D_k}$, *за исключением точек A, B, где они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.*

Заметим, что уравнение (6) однозначно обратимо относительно функции $u_0(x,y)$ в классе функций $C(\overline{D_k})$. Действительно, равенство (6) перепишем в следующем виде:

$$\tilde{u}(r)=\tilde{u}_0(r)-\int_0^r \tilde{u}_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda r(r-s)}]ds, \tag{11}$$

где $r^2=x^2+\operatorname{sgn} y\cdot y^2$, $u(x,y)=u(\frac{x}{r}r,\frac{y}{r}r)=\tilde{u}(r)$, $u_0(\frac{x}{r}s,\frac{y}{r}s)=\tilde{u}_0(s)$.

Тогда, в силу результатов [3,10], решением уравнения (11) является функция вида:

$$\tilde{u}_0(r)=\tilde{u}(r)+\int_0^r \tilde{u}(s)\frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial r}I_0[\sqrt{\lambda s(r-s)}]ds, \tag{12}$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя.

Если функции $\tilde{u}_0(r)$ и $\tilde{u}(r)$ непрерывны в $\overline{D_k}$, то равенства (11) и (12) являются формулами взаимного обращения [6]. Таким образом, справедливо следующее:

Теорема 1. *Если функции* $u_0(x,y)$ *и* $u(x,y)$ *являются соответственно регулярными в* D_k *решениями уравнений* (5) *и* (4), *то между решениями этих уравнений существует взаимно-однозначное соответствие, которое устанавливается по формулам* (11) *и* (12).

Теорема 2. *Пусть кривая Γ – из класса Ляпунова, и на ней отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s)=1$. *Тогда, если в классе регулярных в* D_k *решений уравнения* (4) *существует решение обобщенной задачи Трикоми, то оно единственно при всех* λ, *удовлетворяющих неравенству*

$$\frac{9\pi^2}{16y_{\min}^2}<\lambda<\frac{\pi^2}{4y_{\max}^2}\,,$$

где $n = (n_1(s), n_2(s))$ *– единичный вектор внутренней нормали к границе области,* $n_1(s) = -\dfrac{dy}{ds}$, $n_2(s) = \dfrac{dx}{ds}$.

Предварительно отметим, что в работе [7] для уравнения типа Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} - \alpha(y)u = 0 \qquad (13)$$

доказана

Теорема 3 [3]. *Пусть:* 1) *кривая Г – из класса Ляпунова и на ней отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0) \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1(0, y_{\max}]$; 3) *функция* $\alpha(y) \in C[0, y_{\max}]$ *такова, что существует решение* $\mu(y)$ *уравнения Риккати*

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y) \qquad (14)$$

на интервале $(0, y_{\max})$ *из класса* $C^1[0, y_{\max}]$, *удовлетворяющее условию* $\mu(0) \le 0$; $\alpha(y) \in C[y_{\min}, 0]$ *и* $\alpha(y) \ge 0$ *при y<0.*

Тогда, если в классе регулярных в D решений уравнения (13) существует решение обобщенной задачи Трикоми, то оно единственно.

Доказательство теоремы 2.

Умножим уравнение (4) на *sgny*. Тогда оно примет вид:

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} + \operatorname{sgn} y \cdot \lambda u = 0. \qquad (15)$$

Теперь покажем, что при некоторых условиях на λ для уравнения (15) справедлива теорема 3. В случае уравнения (15): *K(y)=sgn y*, $\alpha(y) = -\lambda \operatorname{sgn} y$.

Пусть $\lambda \ge 0$. Решением уравнения Риккати (14) на интервале $(0, y_{\max})$ является функция $\mu(y) = \sqrt{\lambda} tg[\sqrt{\lambda}(k - y)]$, где постоянная k определяется из условий $-\pi/2 < \sqrt{\lambda}(k - y) \le 0$, $0 \le y \le y_{\max}$. Отсюда вытекает, что функция $\mu(y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3, существует, если $\sqrt{\lambda} < \pi / 2y_{\max}$.

При $\lambda < 0$ теорему 3 прямо не удается использовать для получения единственности решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения (4). В этом случае введем функцию

$$z(x, y) = u(x, y) \exp \int_0^y \mu(t) dt,$$

которая является решением уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot z_{xx} + z_{yy} + 2\mu(y) z_y = 0, \qquad (16)$$

где функция $\mu(t)$ определяется как решение уравнения Риккати

$$\mu'(y)+\mu^2(y)+\operatorname{sgn} y\cdot\lambda=0. \qquad (17)$$

Пусть

$$\mu(y)=\begin{cases}\mu_+(y), & 0\le y\le y_{\max},\\ \mu_-(y), & y_{\min}\le y\le 0.\end{cases}$$

Тогда из уравнения (17) получим

$$\mu_+(y)=-\sqrt{|\lambda|}, \quad 0\le y\le y_{\max},$$

$$\mu_-(y)=\sqrt{|\lambda|}tg[\sqrt{\lambda}(k-y)], \quad y_{\min}\le y\le 0,$$

где постоянная *k* находится из условий

$$-\frac{\pi}{2}<\sqrt{|\lambda|}(k-y)<\frac{\pi}{2}, \quad y_{\min}\le y\le 0.$$

На плоскости *(x,y)* введем новые переменные (θ,σ)

$$x=\theta, \qquad y=\int_0^\sigma\sqrt{|K(t)|}dt, \qquad (18)$$

$$K(\sigma)=\begin{cases}K_+(\sigma)=\exp(-4\sqrt{|\lambda|}y)k_0^2, & k_0=const>0, \ \sigma\ge 0,\\ K_-(\sigma)=-d_0^2\cos^4[\sqrt{|\lambda|}(k-y)], & d_0=const>0, \ \sigma\le 0.\end{cases}$$

Тогда уравнение (16) принимает вид

$$K(\sigma)z_{\theta\theta}+z_{\sigma\sigma}=0. \qquad (19)$$

Следовательно, обобщенная задача Трикоми для уравнения (4) при $\lambda<0$ сведена к обобщенной задаче Трикоми для уравнения (19) на плоскости (θ,σ), но с разрывным условием склеивания на линии изменения типа $\sigma=0$: $z_\sigma(\theta,0-0)\ne z_\sigma(\theta,0+0)$.

Из доказательства теоремы 3 следует, что для решения однородной обобщенной задачи Трикоми для уравнения (19) справедливо неравенство

$$\int_0^t z_\theta(\theta,0-0)z_\sigma(\theta,0-0)d\theta=\int_0^t z_x(x,0)z_y(x,0-0)d_0\cos^2(\sqrt{|\lambda|}k)dx\ge 0, \qquad (20)$$

при $0\le t\le l$. Теперь для справедливости теоремы 3 для уравнения (17) достаточно показать, что

$$\int_0^t z_\theta(\theta,0+0)z_\sigma(\theta,0+0)d\theta\ge 0, \quad 0\le t\le l.$$

Действительно, из (18) и (20) имеем

$$\int_0^t z_\theta(\theta,0+0)z_\sigma(\theta,0+0)d\theta=\int_0^t z_x(x,0)z_y(x,0+0)k_0dx=$$

$$= k_0 \int_0^t z_x(x,0)[z_y(x,0-0) + z(x,0)(\mu_-(0) - \mu_+(0))]dx =$$

$$= k_0 \int_0^t z_x(x,0-0) z_y(x,0-0)dx + [\mu_-(0) - \mu_+(0)] z^2(t,0) \frac{k_0}{2} \geq 0,$$

если $\mu_-(0) - \mu_+(0) = \sqrt{|\lambda|}[tg(\sqrt{|\lambda|}k) + 1] \geq 0.$ Последнее неравенство справедливо, когда $-\frac{\pi}{4} \leq \sqrt{|\lambda|}(k-y) < \frac{\pi}{2}$, $y_{\min} \leq y \leq 0.$

Отсюда получим условие относительно параметра $\lambda > -\frac{9\pi^2}{16 y_{\min}}$. Тем самым теорема 2 доказана.

п.2. Докажем существование решения задачи (7) – (10). Интегральное представление (6) в классе регулярных в D_k решений уравнения (4) позволяет свести решение задачи (7) – (10) к решению обобщенной задачи Трикоми для уравнения (5) в области D_k с пока неизвестными краевыми условиями $u_0 = \varphi_0$ на Г и $u_0 = \psi_0$ на AC.

Прежде всего, заметим, что

$$\psi_0(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(s) \frac{x}{s} \frac{\partial}{\partial x} I[\sqrt{\lambda(1-k^2)s(x-s)}]ds.$$

В самом деле, подставим в интегральный член формулы (6) значение

$$u_0(x,y) = \tau_0(x+y) - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \psi_0\left[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n(x+y)\right] - \tau_0[\alpha^{n+1}(x+y)] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \psi_0\left[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n(x-y)\right] + \tau_0[\alpha^{n+1}(x-y)] \right\},$$

где $\alpha = \frac{1-k}{1+k}$, являющееся решением обобщенной задачи Дарбу для уравнения (5) в области D_{k-} с данными: $u_0(x,-kx) = \psi_0(x)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{1+k}$; $u_0(x,0) = \tau_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Если известно, что $\psi_0(x) \in C[0,\frac{1}{1+k}] \cap C^1[0,\frac{1}{1+k}) \cap C^2(0,\frac{1}{1+k})$, $\tau_0(x) \in C[0,1] \cap C^1[0,1) \cap C^2(0,1)$, $\tau(0) = \psi_0(0) = 0$, функции $\tau_0(s\alpha^n)\alpha^n$ и $\psi_0(s\alpha^n)\alpha^n$ ограничены по n при любом фиксированном *x*. Получим

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 \left\{ \tau_0(xt+yt) - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \psi_0\left[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n t(x+y)\right] - \right.\right.$$

$$-\psi_0\left[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n t(x-y)\right]-\tau_0[\alpha^{n+1}t(x+y)]+\tau_0[\alpha^{n+1}t(x-y)]\}\times\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}]dt. \quad (21)$$

Теперь в равенстве (21), полагая *y=-kx* с учетом граничного условия $u_0=\psi_0$ на AC, будем иметь

$$\psi(x)=\psi_0(x)-\int_0^1\psi_0(xt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)x^2(x-t)}]dt$$

или

$$\psi(x)=\psi_0(x)-\int_0^x\psi_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)x(x-s)}]ds.$$

Получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Его решение в силу [6] имеет вид

$$\psi_0(x)=\psi(x)+\int_0^x\psi(s)\frac{x}{s}\frac{\partial}{\partial x}I_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)s(s-x)}]ds, \quad (22)$$

где $\psi_0(x)$ обладает той же гладкостью, что и $\psi(x)$.

Теперь найдем функцию $\varphi_0(x)$ с помощью аналогичных рассуждений, как и в случае решения задачи Трикоми [6]. Функцию $u_0(x,y)$ в области D_{k+} определим как решение задачи Хольмгрена для уравнения Лапласа с граничными условиями:

$$u_0(x,y)\big|_{\Gamma}=u_0(x(s),y(s))=\varphi_0(s), \quad 0\le s\le l, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}=\nu_0(x), \quad 0<x<1. \quad (24)$$

Известно [12, гл. 4;5], что решение этой задачи с граничными условиями (23) и (24) методом Грина выписывается в явном виде:

$$u_0(x,y)=\int_0^1\nu_0(\xi)G(\xi,0;x,y)d\xi+\int_0^l\varphi_0(s)\frac{\partial G(\xi(s),\eta(s);x,y)}{\partial N}ds, \quad (25)$$

где $G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+p(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи Хольмгрена уравнения Лапласа, $r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2$, $p(\xi,\eta;x,y)$ – функция гармоническая в области D_{k+} по координатам точек (ξ,η) и *(x,y)* строится аналогично [12, с.184].

Отсюда найдем соотношение между функциями $\tau_0(x)$ и $\nu_0(x)$. Полагая в (25) *y=0*, будем иметь

$$\tau_0(x)-\int_0^1 G(\xi,0;x,y)\nu_0\xi d\xi=\varphi_*(x), \quad 0\le x\le 1, \quad (26)$$

где

$$\varphi_*(x)=\int_0^l \varphi_0(s)\frac{\partial G}{\partial N}ds, \quad \tau_0(x)=u_0(x,0).$$

Далее, на основании решения задачи Дарбу для уравнения (5) с данными $u_0(x,0)=\tau_0(x)$, $0\le x\le 1$, $u_0(x,-kx)=\psi(x)$, $0\le x\le \frac{1}{1+k}$ найдем второе соотношение между функциями $\tau_0(x)$ и $\nu_0(x)$ на отрезке *AB*, привнесенное из гиперболической части смешанной области D_k:

$$\tau_0'(x)-\nu_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\alpha)\alpha^n\psi_0'[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n x], \ 0<x<1. \qquad (27)$$

Исключая $\tau_0(x)$ из (26) и (27), получаем интегральное уравнение для определения функции $\nu_0(x)$

$$\nu_0(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu_0(t)dt=M(x), \qquad (28)$$

где

$$M(x)=F(x)-\int_0^1 K(t,x)\nu_0(t)dt,$$

$$F(x)=\varphi_*'(x)-\sum_{n=0}^{\infty}(1+\alpha)\alpha^n\psi_0'\frac{1+\alpha}{2}\alpha^{nx}, \quad 0<x<1.$$

$$K(t,x)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}[p(t,0;x,0)-\ln(t+x-2tx)].$$

Как известно, [12, с.312] в случае, когда кривая Г оканчивается сколь угодно малой длины дугами полуокружности, ядро *K(t,x)* непрерывно дифференцируемо в квадрате $0\le x,t\le 1$, за исключением точек (0,0) и (1,1), где оно имеет слабую особенность.

Если $\varphi_0(s)\in C[0,l]$, $\varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0$ и в малой окрестности точек 0 и l удовлетворяет условию Гельдера с показателем α из [1/2,1], то функция $F(x)\in C^1(0,1)$ и при $x\to 0$ и $x\to 1$ имеет оценку $F(x)=O([x(1-x)]^{\alpha-1/2})$.

Теперь на основании отмеченного выше нетрудно получить решение сингулярного интегрального уравнения (28), которое непрерывно дифференцируемо в интервале (0,1) и на его концах может допускать интегрируемые особенности порядка меньше единицы. Такое решение методом Карлемана-Векуа определяется по формуле

$$\nu_0(x)=\frac{1}{2}M(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)M(t)dt.$$

Вместо функции *M(x)*, подставляя ее выражение, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\nu_0(x) = \int_0^1 H(t,x)\nu_0(t)dt + f(x), \qquad (29)$$

где

$$H(t,x) = -\frac{1}{2}K(t,x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-\tau)}{\tau(1-x)}}\left(\frac{1}{\tau - x} + \frac{1-2\tau}{\tau + x - 2\tau x}\right)K(t,\tau)d\tau. \qquad (30)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F(t)dt. \qquad (31)$$

Ядро *H(t,x)*, как показано [12, с.317], может иметь особенности в точках (0,0) и (1,1) порядка меньше, чем 1/2. Свободный член *f(x)* ограничен вблизи точки 0, может иметь особенность порядка не выше 1/2 в окрестности точки 1 и принадлежит классу $C^1(0,1)$.

Теперь покажем, что соответствующее уравнению (29) однородное уравнение

$$\nu_0(x) - \int_0^1 H(t,x)\nu_0(t)dt = 0 \qquad (32)$$

имеет только нулевое решение. Действительно, если $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$, то в силу теоремы 2 о единственности решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения (4) $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Тогда из формулы обращения (12) следует $u_0(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Отсюда вытекает, что $\nu_0(x) = 0$ на интервале (0,1), т.е. однородное уравнение (32) имеет только нулевое решение в классе $C^1(0,l) \cap L_1[0,1]$. Тогда на основании теории Фредгольма решение уравнения (27) может быть записано в виде:

$$\nu_0(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)R(t,x)dt, \qquad (33)$$

где *R(t,x)* – резольвента ядра *H(t,x)*.

Далее, подставляя (33) в (25) и меняя пределы интегрирования, получим

$$u_0(x,y) = \int_0^l \varphi_0(s)R(s;x,y)ds + g(x,y), \qquad (34)$$

$$R(s;x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial N}G[\xi(s),\eta(s);\theta,0]\right\}G(\theta,0;x,y)d\theta +$$

$$+\int_0^1 G(\theta,0;x,y)\int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial N}G[\xi(s),\eta(s);t,0]\right\}R(t,\theta)dtd\theta,$$

$$g(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^1\psi_0'(\frac{\theta}{2})G(\theta,0;x,y)d\theta-\frac{1}{4\pi}\int_0^1 G(\theta,0;x,y)\int_0^1\psi_0'(\frac{\theta}{2})R(t,\theta)dtd\theta.$$

Функцию $u_0(x,y)$, заданную формулой (34), подставим в интегральный член формулы (6) при *y>0*, и, снова меняя пределы интегрирования, будем иметь

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\int_0^l\varphi_0(s)\int_0^1 R(\tau;xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dtds- \qquad (35)$$

$$-\int_0^1 g(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt.$$

Переходя в (35) к пределу при $(x,y)\to(x(s),y(s))\in\Gamma$, получим

$$\varphi_0(s)-\int_0^l\varphi_0(\tau)P(\tau,s)d\tau=q(s), \qquad (36)$$

где

$$P(\tau,s)=\int_0^1 R(\tau;x(s)t,y(s)t)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda[x^2(s)+y^2(s)](1-t)}]dt,$$

$$q(s)=\varphi(s)+\int_0^1 g[x(s)t,y(s)t]\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda[x^2(s)+y^2(s)](1-t)}]dt.$$

Поскольку ядро $P(\tau,s)$ непрерывно в квадрате $0\le\tau,s\le 1$ и правая часть *q(s)* непрерывна на [0,1], то к уравнению (36) применима теория Фредгольма. В силу теоремы 2 о единственности решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения (4) и формулы обращения (12) соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi_0(s)-\int_0^l\varphi_0(\tau)H(\tau,s)d\tau=0$$

имеет только нулевое решение. Тогда на основании альтернативы Фредгольма неоднородное интегральное уравнение (36) имеет единственное решение в классе непрерывных на [0,l] функций.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Если* $\varphi_0(s)\in C[0,l]$ *и в достаточно малой окрестности точек s=0 и s=l удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\alpha\in[1/2,1]$, $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\psi'(x)\in L_2[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=0$ *и кривая* Γ *и* λ *удовлетворяют условиям теоремы* 2, *то существует единственное решение обобщенной задачи Трикоми для уравнения*(4) *в классе его регулярных в* D_k *решений, которое определяется формулой* (11), *где* $u_0(x,y)$ *– решение обобщенной задачи Трикоми для* *уравнения* (5) *с граничными условиями* $u_0(x,y)=\varphi_0(s)$ на Γ, $u_0(x,y)=\psi_0(x)$ *на* AC а $\varphi_0(s)$ *есть решение интегрального уравнения Фредгольма* (36), $\psi_0(x)$ *находится по формуле* (22).

Заключение

Полученные в исследовании результаты имеют теоретический характер и обладают новизной. Основные положения разрабатываемой проблемы представлены в виде докладов [10-13] на научных конференциях. Они могут быть использованы при дальнейшей разработке теории краевых задач для уравнений смешанного типа.

Авторы выражают благодарность Камилю Басыровичу Сабитову, доктору физико-математических наук, профессору, за высказанные предложения и замечания при организации исследования проблемы решения краевых задач.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина // Докл. АН СССР, 1957. Т.112. №3. С.375 – 376.
3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М. – Л.: Гостехиздат, 1948. 296с.
4. Жегалов В.И. Об одном случае задачи Трикоми // Труды семинара по краевым задачам. – Изд-во Казанск. ГУ, 1966. Вып.3. С. 28 – 36.
5. Сабитов К.Б. Обращение некоторых интегральных уравнений типа Вольтера // ДАН СССР, 1990. Т.314. № 2. С. 300 – 303.
6. Сабитов К.Б. Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1991.
7. Сабитов К.Б., Шмелёва Н.Г. Краевые задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с комплексным параметром // Известия ВУЗов. Математика, 2003. № 3 (490). С. 49-58.
8. Сабитов К.Б., Шмелёва Н.Г. О единственности решения задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Вестник Башкирского университета, 1998. №2(1). С. 8 – 12.
9. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа: Пер. с итал. – М. –Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
10. Шмелёва Н.Г. Обобщенная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с вещественным параметром // Современные проблемы физики и математики: Труды Всероссийской научной конференции. – Уфа: Гимм, 2004. Т.1. С. 174 – 179.

11. Шмелёва Н.Г., Ефимова Г.Ф. К вопросу об одном способе решения краевых задач для уравнения со спектральным параметром // Информационное пространство современной науки: материалы III Международной заочно-практической конференции. 28 марта 2011 г. – Чебоксары: НИИ педагогики и психологии, 2011. С. 145-149.
12. Шмелёва Н.Г., Ефимова Г.Ф. О применении интегрального представления при решении краевых задач // Прикладная физика и математика, 2014. №2. С. 57-64.
13. Gellerstedt S.G. Sur on probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: These pour le doctorat. – Uppsala, 1935. 92 p.

Рецензенты:

Кризский В.Н., д.ф.-м.н., профессор, Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного университета, г. Стерлитамак;

Шулаев Н.С., д.т.н., профессор, филиал ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет», г. Стерлитамак.