УДК 513

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ В ПАКЕТЕ MATHCAD НА ПРИМЕРЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Фурина К.О.

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990,Пермский край, г. Пермь – ГСП, Комсомольский проспект, д. 29.e-mail: darkcityfightclub@mail.ru

Транспортная задача линейного программирования получила в настоящее времяширокое распространение в теоретических обработках и практическом примененииина транспорте и в промышленности. Она имеет большое значение в делерационализации постановок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственнойпродукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различныхвидов транспорта.Кроме того, к задачам транспортного типа сводятся многие другие задачилинейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарногопланирования.В данной работе рассмотрена математическая постановка транспортной задачи. Разработан подробный алгоритм, позволяющийрешать задачи на транспортировку с матрицей исходных данных размерности большей, чем 20x10 в пакете MathCAD. Приведен пример для транспортной задачи, состоящей из 16 поставщиков и 23 покупателей, который наглядно показываетоптимальный план поставок.

Ключевые слова: транспортная задача большой размерности, оптимальный план перевозок, минимизация суммарных затрат.

ON SOLVING LARGE-SCALE PROBLEMS IN THE PACKAGE MATHCAD ON THE EXAMPLE OF THE TRANSPORTATION PROBLEM

Furina K.O.

Perm National Research Polytechnic University, Russia, 614990, Perm, Perm - GSP, Komsomol prospect, 29, darkcityfightclub@mail.ru

Transportation problem of linear programming currently received widespread theoretical and practical application of the treatments on the transport and industry. It is of great importance in streamlining productions of major industrial and agricultural products, as well as the optimal planning of freight flows and the various transport modes. In addition, the objectives of the transport type reduces many other linear programming problems - assignment problem, network, scheduling. In this paper, the mathematical formulation of the transport problem. A detailed algorithm that allows to solve the problem of transporting raw data matrix with dimensions greater than 20x10 package MathCAD. An example for the transportation problem, consisting of 16 suppliers and 23 buyers, who demonstrates an optimal supply plan.

Keywords: transportation problem of large dimension, optimal transportation plan, minimizing the total costs.

Транспортировка важная область жизнедеятельности человека. Перевозка людей и грузов (как пищевых, так и промышленных) — это неотъемлемая часть жизни современного человека. Так расходы на транспортировку различных видов грузов составляют в Великобритании -15%, во Франции — 9%, в Дании - 15% от общих национальных расходов. Необходимость решения таких транспортных задач, с минимизацией издержек на перевозку, определяется большим экономическим эффектом при нахождении лучшего решения, т.к. это явно увеличивает прибыль предприятия. Таким образом, решение транспортных задач большой размерности является актуальной задачей. [4]

Транспортную задачу размерности 20x10 можно решать в среде MS Excel, а большей размерности уже в пакете MathCAD.

Алгоритм решения транспортной задачи большой размерности

Постановка задачи

Транспортная задача является специальным типом задач линейного программирования и формулируется следующим образом. Имеется m пунктов отправления (или пунктов производства) A_i,..., A_m, в которых сосредоточены запасыоднородных продуктов в количестве a_1, ..., a_m единиц. Имеется n пунктов назначения (или пунктов потребления) B_1, ..., B_m, потребность которых в указанных продуктах составляет b_1,..., b_n единиц. Известны также транспортные расходы c_{ij}, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n. ПустьX_{ij} - количество единиц продукта, поставляемого из пункта A_i в пункт B_j. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

т. е. общий объем производства равен общему объему потребления. Приведенная формулировка транспортной задачиназывается замкнутой транспортной моделью. Формализуем эту задачу.

Математическая постановка этой задачи имеет вид:

$$f = min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j = 1,2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i = 1,2, \dots, m$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Объемы перевозок - неотрицательные числа, так как перевозки из пунктовпотребления в пункты производства исключены.

Решение транспортной задачи является оптимальным планом перевозок (поставок) продукции.

Таким образом, транспортная задача сводится к минимизации суммарных затратпри выполнении условий полного удовлетворения спроса и равенства вывозимогоколичества продукта запасам его в пунктах отправления.[2]

Алгоритм решения транспортной задачи с помощью пакетаMathCAD

1. Зададим значение m (количество производителей на единицу меньше).
2. Зададим значение n (количество потребителей на единицу меньше).
3. Зададим диапазон изменения для i (от 0 до m) иj (от 0 до n).
4. Введем вектор $t_j = 1$и вектор $l_i = 1$
5. Введем массив запасов aи массив потребностей b
6. Теперь сформируем массив транспортных расходов. Для этого разобьем нашу таблицу на несколько массивов. Их можно разбивать по горизонтали, по вертикали и даже по вертикали и по горизонтали.Введем эти массивы.
7. С помощью специальной функции augment(…..),в которой аргументами являются эти массивы, записывающиеся через запятую, соберем наш массив транспортных расходов.
8. Присвоим значение этой функции массиву c.
9. Результат выведем на экран.
10. Запишемформулу суммарных затрат и начальному приближению присвоим 0.
11. Вводимнеобходимые условия:условие полного удовлетворения спроса, условие равенства вывозимогоколичества продукта запасам его в пунктах отправления и условие неотрицательности.
12. Массиву X присвоим функцию Minimize(f,x) для минимизации наших расходов.
13. Выведем этот массив.
14. Найдем суммарные затратыf(x). [1]

Пример

Рассмотрим алгоритм решения транспортной задачи для 16 производителей и 23 потребителей. [3,5]

m:= 15

n:= 22

i:= 0..15

j:= 0..22

$t_j \coloneqq 1$

$l_i \coloneqq 1$

Рис. 1. Ввод массива запасов и массива потребностей

$$a := \begin{pmatrix} 4473.00 \\ 6080.10 \\ 1153.90 \\ 2388.70 \\ 2630.50 \\ 4516.90 \\ 1333.20 \\ 1586.60 \\ 3637.70 \\ 3931.50 \\ 916.10 \\ 5334.20 \\ 2030.50 \\ 10337.50 \\ 3749.10 \\ 6265.30 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1488.00 \\ 6101.30 \\ 2248.30 \\ 3953.50 \\ 2522.10 \\ 3781.30 \\ 3006.60 \\ 1643.70 \\ 1442.10 \\ 4143.20 \\ 3145.90 \\ 3330.10 \\ 2864.40 \\ 1679.60 \\ 2182.30 \\ 1450.40 \\ 3561.60 \\ 1400.60 \\ 1503.50 \\ 1259.90 \\ 4192.40 \\ 1385.40 \\ 2078.60 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Разбиение таблицы на несколько массивов

$$v1 := \begin{pmatrix} 397 & 395 & 380 & 410 & 398 & 390 \\ 337 & 349 & 345 & 335 & 342 & 345 \\ 402 & 403 & 399 & 397 & 404 & 406 \\ 252 & 250 & 249 & 251 & 245 & 252 \\ 315 & 317 & 319 & 317 & 310 & 314 \\ 303 & 307 & 306 & 304 & 305 & 302 \\ 230 & 233 & 235 & 227 & 231 & 236 \\ 241 & 245 & 242 & 239 & 237 & 240 \\ 431 & 429 & 433 & 427 & 435 & 438 \\ 352 & 350 & 345 & 351 & 355 & 347 \\ 273 & 275 & 280 & 273 & 262 & 271 \\ 237 & 242 & 244 & 240 & 242 & 239 \\ 257 & 260 & 262 & 259 & 256 & 261 \\ 410 & 412 & 417 & 408 & 413 & 417 \\ 208 & 210 & 213 & 214 & 211 & 215 \\ 319 & 321 & 322 & 318 & 316 & 322 \end{pmatrix} \quad v2 := \begin{pmatrix} 384 & 381 & 394 & 370 & 375 & 382 \\ 344 & 349 & 342 & 350 & 352 & 344 \\ 397 & 395 & 401 & 408 & 407 & 401 \\ 248 & 251 & 253 & 252 & 254 & 247 \\ 320 & 316 & 321 & 324 & 322 & 313 \\ 308 & 304 & 305 & 306 & 307 & 309 \\ 234 & 228 & 232 & 235 & 234 & 226 \\ 242 & 239 & 241 & 243 & 242 & 244 \\ 433 & 430 & 429 & 433 & 434 & 427 \\ 352 & 353 & 351 & 348 & 346 & 350 \\ 269 & 268 & 271 & 272 & 271 & 273 \\ 243 & 237 & 238 & 243 & 245 & 243 \\ 263 & 257 & 260 & 263 & 260 & 259 \\ 407 & 409 & 411 & 415 & 414 & 406 \\ 209 & 207 & 210 & 213 & 211 & 213 \\ 323 & 318 & 320 & 321 & 323 & 324 \end{pmatrix} \quad v3 := \begin{pmatrix} 380 & 385 & 384 & 402 & 397 \\ 352 & 346 & 347 & 351 & 347 \\ 398 & 395 & 402 & 409 & 401 \\ 250 & 248 & 252 & 254 & 249 \\ 317 & 314 & 318 & 321 & 318 \\ 310 & 303 & 304 & 308 & 307 \\ 229 & 230 & 229 & 234 & 232 \\ 238 & 239 & 242 & 245 & 243 \\ 440 & 431 & 428 & 433 & 436 \\ 355 & 352 & 349 & 354 & 351 \\ 267 & 268 & 272 & 275 & 270 \\ 240 & 239 & 241 & 246 & 243 \\ 258 & 258 & 263 & 265 & 259 \\ 413 & 412 & 409 & 412 & 411 \\ 207 & 213 & 214 & 215 & 211 \\ 319 & 320 & 322 & 325 & 321 \end{pmatrix}$$

$$v4 := \begin{pmatrix} 404 & 407 & 373 & 403 & 407 & 381 \\ 344 & 342 & 350 & 339 & 337 & 345 \\ 397 & 404 & 396 & 399 & 402 & 396 \\ 247 & 248 & 252 & 250 & 247 & 248 \\ 317 & 317 & 314 & 315 & 314 & 318 \\ 301 & 304 & 305 & 306 & 301 & 303 \\ 228 & 229 & 233 & 227 & 231 & 232 \\ 241 & 242 & 237 & 236 & 238 & 241 \\ 428 & 429 & 425 & 432 & 428 & 433 \\ 349 & 350 & 348 & 353 & 352 & 348 \\ 271 & 269 & 267 & 271 & 272 & 269 \\ 241 & 242 & 238 & 241 & 236 & 240 \\ 258 & 260 & 262 & 258 & 259 & 262 \\ 410 & 411 & 408 & 407 & 412 & 410 \\ 209 & 210 & 213 & 207 & 209 & 213 \\ 319 & 320 & 317 & 320 & 319 & 318 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Полученный результат после объединения массивов

augment(v1 , v2 , v3 , v4) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	397	395	380	410	398	390	384	381	394
1	337	349	345	335	342	345	344	349	342
2	402	403	399	397	404	406	397	395	401
3	252	250	249	251	245	252	248	251	253
4	315	317	319	317	310	314	320	316	321
5	303	307	306	304	305	302	308	304	305
6	230	233	235	227	231	236	234	228	232
7	241	245	242	239	237	240	242	239	241
8	431	429	433	427	435	438	433	430	429
9	352	350	345	351	355	347	352	353	351
10	273	275	280	273	262	271	269	268	271
11	237	242	244	240	242	239	243	237	238
12	257	260	262	259	256	261	263	257	260
13	410	412	417	408	413	417	407	409	411
14	208	210	213	214	211	215	209	207	210
15	319	321	322	318	316	322	323	318	320

c:= augment(v1,v2,v3,v4)

Рис. 4. Вывод массива с:

c =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	397	395	380	410	398	390	384	381	394	370
1	337	349	345	335	342	345	344	349	342	350
2	402	403	399	397	404	406	397	395	401	408
3	252	250	249	251	245	252	248	251	253	252
4	315	317	319	317	310	314	320	316	321	324
5	303	307	306	304	305	302	308	304	305	306
6	230	233	235	227	231	236	234	228	232	235
7	241	245	242	239	237	240	242	239	241	243
8	431	429	433	427	435	438	433	430	429	433
9	352	350	345	351	355	347	352	353	351	348
10	273	275	280	273	262	271	269	268	271	272
11	237	242	244	240	242	239	243	237	238	243
12	257	260	262	259	256	261	263	257	260	263
13	410	412	417	408	413	417	407	409	411	415
14	208	210	213	214	211	215	209	207	210	213
15	319	321	322	318	316	322	323	318	320	321

$$f(x) := \sum_{i=0}^{15} \sum_{j=0}^{22} c_{i,j} * x_{i,j}$$

$$x_{m,n} := 0$$

Given

$$x * t = a$$

$$x^T * 1 = b$$

$$x \geq 0$$

x:=Minimize (f,x)

Рис. 5. Вывод массива x:

x =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1488	0	0	3953.5	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	514.1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1606	1024.5	0	0	0
5	0	0	0	0	0	2419.5	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	3637.7	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1734.2	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	916.1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	337.3	0	1613.7	1442.1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	3006.6	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	2463.6	0	0	0	0	0	0	0

14). f(x) = 19554634

Заключение

Так как транспортная задача имеет экономический подтекст, то она является актуальной для различного масштаба производственных и торговых предприятий. Разработан алгоритм для нахождения опорного плана транспортной задачи, который можно применять для решения транспортных задач, представленных в матричном виде порядка больше 20x10. Приведенныйпример, позволяет сделать вывод, о том что данный алгоритм возможно использовать для эффективного нахождения опорного плана транспортной задачи.

Список литературы

1. Алейников И. А. Практическое использование пакета MathCAD при решении задач. — М.: Российский государственный открытый технический университет путей сообщения Министерства путей сообщения Российской Федерации, 2002.
2. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Наука, 1969. – С. 382.
3. Готовые обзоры рынков [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://businesstat.ru
4. Емельянова Т. С. Разработка и исследование алгоритмов решения транспортных задач с использованием генетических методов: дис., канд. техн, наук. — Т.. 2009. — С. 3.
5. Министерство экономического развития Российской Федерации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ved.gov.ru

Рецензенты:

Первадчук В.П., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика» ПНИПУ, г. Пермь.

Цаплин А.И., д.т.н., профессор, ПНИПУ, г. Пермь.