УДК 517.929:517.67

ВНЕДРЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ОСНОВНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФОНДОВ

Гребнева Е.А.[1], Губайдуллина Р.В.[1], Кожемякин Л.В.[1], Огородов А.А.[1]

[1] *ФГБОУ ВПО "Пермский национальный исследовательский политехнический университет", Пермь, Россия (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29), Robalboa@rambler.ru*

Износ основных средств негативно влияет на производство. Ставиться краевая задача с интегральным объемом основных средств, внедряется импульсное управление и запаздывание. Задача проверяется на однозначность и разрешимость. Теперь возможно решить проблему износа основных средств. Обеспеченность предприятия основными фондами в необходимом количестве и ассортименте является одним из важнейших факторов повышения эффективности производства. На сегодняшний день многие предприятия страдают от износа собственных средств, его уровень достигает 45-65%. Рассмотрим линейную модель динамики уровня основных средств с равномерным начислением амортизации. Эта модель позволяет решить эту проблему, с помощью грамотного распределения валовых инвестиций и амортизации. Так же в модели учтено запаздывание, которое всегда возникает в реальной жизни. Позже вводиться импульсное управление, оно помогает нам построить прогноз с учетом различных скачков экономики.

Ключевые слова: импульсное управление, запаздывание, «W- подстановка», интегральное уравнение Фредгольма

INTRODUCTION OF PULSE MANAGEMENT IN DYNAMIC MODEL OF THE FIXED BUSINESS ASSETS

Grebneva E.A.[1], Gubaydullina R.V.[1], Kozhemyakin L.V.[1] , Ogorodov A.A.[1]

[1] *Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia (614990, Perm, avenue Komsomol, 29), Robalboa@rambler.ru*

Depreciation of fixed assets negatively influences production. To be set a regional task with an integrated volume of fixed assets, pulse management and delay takes root. The task is checked for unambiguity and resolvability. Now it is possible to solve a problem of wear of the main the sredstv. Sobstvennykh of means, his level reaches 45-65%. Security of the enterprise with fixed assets in necessary quantity and the range is one of the most important factors of increase of production efficiency. Today many enterprises suffer from wear of own means, its level reaches 45-65%. We will consider linear model of dynamics of level of fixed assets with uniform charge of depreciation. This model allows to solve this problem, by means of competent distribution of gross investments and depreciation. Also in model delay which always arises in real life is considered. Later to be entered pulse management, it helps us to construct the forecast taking into account various jumps of economy.

Keywords: pulse management, delay, "W-substitution", Fredholm's integrated equation

Обеспеченность предприятия основными фондами в необходимом количестве и ассортименте является одним из важнейших факторов повышения эффективности производства.

На сегодняшний день многие предприятия страдают от износа собственных средств, его уровень достигает 45-65%.

Рассмотрим линейную модель динамики уровня основных средств с равномерным начислением амортизации.

$$\dot{K}(t) + \mu K([t]) = V(t) + \eta(t), t\epsilon[0; nT], \qquad (1)$$

где $K(t)$ - уровень (объем) основных средств в момент времени t, $V(t)$ - интенсивность ввода реальных валовых инвестиций в основные средства в момент времени

t, μ - норма выбытия (износа, амортизации), $\eta(t)$ - неконтролируемое возмущение, $[t]$ - целая часть действительного числа t.

Эта модель позволяет решить эту проблему, с помощью грамотного распределения валовых инвестиций и амортизации. Так же в модели учтено запаздывание, которое всегда возникает в реальной жизни.

Позже вводиться импульсное управление, оно помогает нам построить прогноз с учетом различных скачков экономики.

Введем следующие обозначения:

$$\dot{K}(t) = x(t);\ \mu = p;\ V(t) + \eta(t) = f(t).$$

Тогда модель примет вид:

$$\dot{x}(t) + px([t]) = f(t), t\epsilon[0; nT]. \quad (2)$$

В качестве показателя функционирования модели рассмотрим интегральный объем основных средств.

$$lx = \int_0^{nT} x(s)ds = \beta. \quad (3)$$

В общем виде краевое условие выглядит следующим образом:

$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x(s)ds = \beta,$ получаем $\psi = nT, \varphi(s) = nT - s.$

Пусть $n = 3,\ T = 1$. Тогда будем рассматривать следующую краевую задачу:

$$\dot{x}(t) + px([t]) = f(t), t\epsilon[0; 3], \quad (4)$$

$$\int_0^3 x(s)ds = \beta. \quad (5)$$

В соответствии с утверждением (1) подберем функцию $u(t)$ такую, что $u(0) \neq 0, lu = 1$. Пусть $u(t)$ имеет вид: $u(t) = \frac{2}{n^2t^2}(nT - t)$ или

$$u(t) = \frac{2}{9}(3 - t).$$

Краевую задачу можно свести к интегральному уравнению на основе утверждения (1) из теории краевых задач:

$$\dot{x}(t) + B(t)x(0) = z(t), \quad (6)$$

где $B(t) = -\frac{\dot{u}(t)}{u(0)} = \frac{1}{3}$.

Краевая задача однозначно разрешима и её решение имеет представление:

$$x(t) = u(t)\beta + \int_0^3 W(t,s)z(s)ds, \quad (7)$$

где $W(t,s) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{9}(3-t)(3-s), 0 \le s \le t \le 3, \\ -\frac{2}{9}(3-t)(3-s), 0 \le t < s \le 3 \end{cases}.$

Применим «W - подстановку»(7)к уравнению (4) :

$$\dot{x}\,(t) + B(t)x(0) = -px([t]) + B(t)x(0) + f(t) \text{или}$$

$$z(t) = -pu([t])\beta - p\int_0^3 W([t],s)z(s)ds + B(t)u(0)\beta + B(t)\int_0^3 W(0,s)z(s)ds +$$
$f(t)$, (8)

где $W([t],s) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{9}(3-[t])(3-s), 0 \le s \le t \le 3, \\ -\frac{2}{9}(3-[t])(3-s), 0 \le t < s \le 3 \end{cases}$,

$$W(0,s) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{3}(3-s), 0 \le s \le t \le 3, \\ -\frac{2}{3}(3-s), 0 \le t < s \le 3 \end{cases}$$

Тогда из (8) получаем:

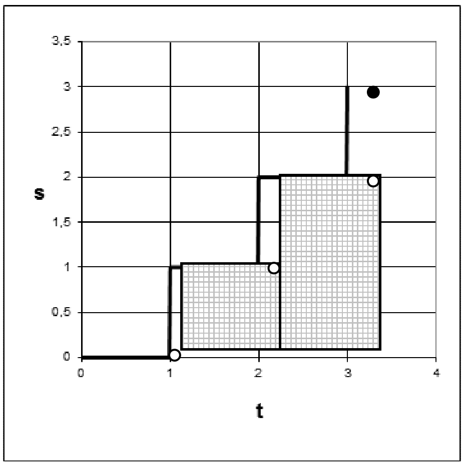
$$z(t) = -p\frac{2}{9}(3-[t])\beta$$
$$-p\int_0^{[t]} W([t],s)z(s)ds \; - p\int_{[t]}^3 W([t],s)z(s)ds \; - \frac{1}{3}\frac{2}{3}\beta$$
$$+ \int_0^3 -\frac{2}{9}(3-s)z(s)ds + f(t)$$

или

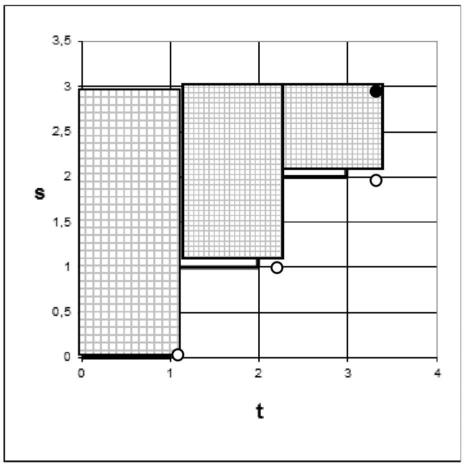
$$z(t) = -p\frac{2}{9}(3-[t])\beta - p\int_0^3 \left(1 - \frac{2}{9}(3-[t])(3-s)\right)\chi_1(t,s)z(s)ds \; - -p\int_0^3 \left(-\frac{2}{9}(3-\right.$$
$$\left.[t])(3-s)\right)\chi_2(t,s)z(s)ds \; - \frac{2}{9}\beta - \frac{2}{9}\int_0^3 (3-s)z(s)ds + +f(t) (9)$$

На рисунках (1) – (2) представлен вид функций $\chi_i(t,s), i = 1,2$.

$\chi_1(t,s)$:



$\chi_2(t,s)$:



Представим каждую из функций χ_i, $i = 1,2$ в виде суммы произведений двух функций, одна из которых зависит только от t, а другая – только от s.

$$\chi_1(t,s) = \mu_0(t)\nu_0(s) + \mu_1(t)\nu_1(s) + \mu_2(t)\nu_2(s).$$

Т.к. на промежутке $t \in [0;1)$ - $[t] = 0 \Rightarrow \mu_0(t) = 0$.

$$\mu_1(t)=\begin{cases}1, t\in[1;2)\\0, t\notin[1;2)\end{cases}\qquad \nu_1(s)=\begin{cases}1, s\in[0;1]\\0, s\notin[0;1]\end{cases}$$

$$\mu_1(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2)\; \nu_1(s)=\eta(s)-\eta(s-1)$$

$$\mu_2(t)=\begin{cases}1, t\in[2;3)\\0, t\notin[2;3)\end{cases}\qquad \nu_2(s)=\begin{cases}1, s\in[0;2]\\0, s\notin[0;2]\end{cases}$$

$$\mu_2(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3)\; \nu_2(s)=\eta(s)-\eta(s-2)$$

$$\chi_2(t,s)=\mu_3(t)\nu_3(s)+\mu_4(t)\nu_4(s)+\mu_5(t)\nu_5(s).$$

$$\mu_3(t)=\begin{cases}1, t\in[0;1)\\0, t\notin[0;1)\end{cases}\qquad \nu_3(s)=\begin{cases}1, s\in[0;3]\\0, s\notin[0;3]\end{cases}$$

$$\mu_3(t)=\eta(t)-\eta(t-1)\; \nu_3(s)=\eta(s)-\eta(s-3)$$

$$\mu_4(t)=\begin{cases}1, t\in[1;2)\\0, t\notin[1;2)\end{cases}\qquad \nu_4(s)=\begin{cases}1, s\in[1;3]\\0, s\notin[1;3]\end{cases}$$

$$\mu_4(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2)=\mu_1(t)\; \nu_4(s)=\eta(s-1)-\eta(s-3)$$

$$\mu_5(t)=\begin{cases}1, t\in[2;3)\\0, t\notin[2;3)\end{cases}\qquad \nu_5(s)=\begin{cases}1, s\in[2;3]\\0, s\notin[2;3]\end{cases}$$

$$\mu_5(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3)=\mu_2(t)\; \nu_5(s)=\eta(s-2)-\eta(s-3)$$

Запишем ядро уравнения (8). Оно будет состоять из двух частей – точной и приближенной.

$$K(t,s)=B(t)W(0,s)-pW([t],s)=-\frac{1}{3}\frac{2}{3}(3-s)-(p\mu_1(t)\nu_1(s)+p\mu_2(t)\nu_2(s)-$$
$$p\frac{2}{9}(3-1)(3-s)\mu_1(t)\nu_1(s)-p\frac{2}{9}(3-2)(3-s)\mu_2(t)\nu_2(s)-p\frac{2}{9}(3-0)(3-s)\mu_3(t)\nu_3(s)-$$
$$\frac{2}{9}p(3-1)(3-s)\mu_4(t)\nu_4(s)-\frac{2}{9}p(3-2)(3-s)\mu_5(t)\nu_5(s)=\underbrace{-\frac{2}{9}}_{a_0(t)}\underbrace{(3-s)}_{b_0(s)}+$$
$$(\underbrace{-p\mu_1(t)}_{a_1(t)}\underbrace{\nu_1(s)\left(1-\frac{4}{9}(3-s)\right)}_{b_1(s)}+(\underbrace{-p\mu_2(t)}_{a_2(t)}\underbrace{\nu_2(s)\left(1-\frac{2}{9}(3-s)\right)}_{b_2(s)}+(\underbrace{-p\frac{2}{3}\mu_3(t)}_{a_3(t)}\underbrace{(3-s)\nu_3(s)}_{b_3(s)}+$$
$$\left(\underbrace{-\frac{4}{9}p\mu_4(t)}_{a_4(t)}\underbrace{(3-s)\nu_4(s)}_{b_4(s)}\right)+(\underbrace{-\frac{2}{9}p\mu_5(t)}_{a_5(t)}\underbrace{(3-s)\nu_5(s)}_{b_5(s)})=\sum_{j=0}^{5}a_j(t)b_j(s)$$

Пусть $g(t)=f(t)+B(t)u(0)\beta-pu([t])\beta=f(t)+\frac{2}{9}\beta-\frac{2}{9}p(3-[t])\beta$,

тогда $z(t)=\int_0^3\left(\sum_{j=0}^{5}a_j(t)b_j(s)\right)z(s)ds+g(t)$ (10)

Умножим обе части (10) на $b_i(t), i=\overline{0{,}5}$ и проинтегрируем от 0 до 3:

$$\int_0^3 b_i(t)z(t)dt=\sum_{j=0}^{5}\int_0^3 b_i(t)\,a_j(t)dt\int_0^3 b_j(s)z(s)ds+\int_0^3 b_i(t)g(t)dt, i=\overline{0{,}5} \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\int_0^3 b_i(t)z(t)dt = x_i;\ \int_0^3 b_i(t)a_j(t)dt = \alpha_{ij};\ \int_0^3 b_i(t)g(t)dt = c_i, i = \overline{0,5}$$

Тогда (11) примет вид: $x_i = \sum_{j=0}^{5} \alpha_{ij}x_j + c_i, i = \overline{0,5}$ (13)

Если матрица

$$A = \{\gamma_{ij}\},\ \gamma_{ij} = e_{ij} - \alpha_{ij},\ \text{где } e_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},\ \ i, j = \overline{1,m} \qquad (13.1)$$

имеет обратную матрицу $A^{-1} = \{\theta_{ij}\}$, то уравнение (9) имеет единственное решение

$$\tilde{z}(t): \tilde{z}(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)x_j + g(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ji}c_i\right) + g(t)$$

или

$$\tilde{z}(t) = \int_0^{nT} R(t,s)z(s)ds + g(t),$$

где

$$R(t,s) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m} a_j(t)\theta_{ji}b_i(s). \qquad (13.2)$$

Таким образом, краевая задача (1), (3) однозначно разрешима.

Известно, что при естественных предположениях относительно ядра $K(t,s)$ для любого заданного $\varepsilon > 0$ вырожденное ядро $\tilde{K}(t,s)$ можно определить следующим образом:

$$\int_0^{nT}\int_0^{nT} [K(t,s)]^2 dtds \le \varepsilon^2\ . \qquad (13.2)$$

Пусть $m \times m$ - матрица A, определенная равенством (13.2) и построенная по функциям $a_j(t)$, $b_j(s)$, $j = \overline{0,m}$ - обратима и $A^{-1} = \{\theta_{ij}\}$. Если выполнено неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{r},$$

где

$$r = 1 + \left\{\int_0^{nT}\int_0^{nT} [R(t,s)]^2 dtds\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (14)$$

а функция $R(t,s)$ определена равенством (14), то уравнение (9) с ядром $K(t,s)$, удовлетворяющим неравенству (16), имеет единственное решение.

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 2.

Пусть матрица A - обратима и выполнено неравенство $\varepsilon < \frac{1}{r}$, где r определено равенством (15). Тогда краевая задача (1),(3) однозначно разрешима, причем ее решение имеет представление

$$\tilde{x}(t) = \int_o^t \tilde{z}(s)ds - \int_0^t B(s)x(0)ds,$$

с точностью

$$\int_0^{nT} [z(t) - \tilde{z}(t)]^2 dt \le \frac{\varepsilon^2 r^4}{(1-\varepsilon \cdot r)^2} \cdot \int_0^{nT} [f(t)]^2 dt,$$

и, кроме того,

$$x(0) = \int_0^{nT} W(0,s) z(s) ds.$$

Для уравнения $\dot{x}(t) + px([t]) = f(t), t\epsilon[0;3]$,введем импульсное управление

$$x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t), \quad t\epsilon[0;nT], \qquad (15)$$

где $x^0(t)$- дифференцируемая функция, а функция $\bar{\eta}(t)$ имеет вид

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t).$$

Здесь Δ^k, $k = 1,..l$ – постоянные, $\chi_{[t_k;T]}(t)$- так называемая характеристическая функция отрезка $[t_k;T]$:

$$\chi_{[t_k;T]}(t) = \begin{cases} 1, если t\epsilon[t_k;T], \\ 0, если t\bar{\epsilon}[t_k;T]. \end{cases}$$

Функция $\bar{\eta}(t)$является ступенчатой.

$$\dot{x^0}(t) + px^0([t]) = \underbrace{f(t) - p\bar{\eta}([t])}_{f_1(t)}, \ t\epsilon[0;3].$$

$$g(t) = f(t) + B(t)u(0)\beta - pu([t])\beta = f(t) + \frac{2}{9}\beta - \frac{2}{9}p(3-[t])\beta - p\bar{\eta}([t]),$$

$$c_i = \int_0^3 b_i(t)g(t)dt - p\int_0^3 b_i(t)(\Delta^1 \chi_{[1;3]}([t]) + \Delta^2\chi_{[2;3]}([t]))\, dt$$

$$= \int_0^3 b_i(t)g(t)dt - p\Delta^1 \int_1^3 b_i(t)\, dt - p\Delta^2 \int_2^3 b_i(t)\ dt$$

Подставим c_i:

$$z(t) = \sum_{j=0}^{5} a_j(t)(\sum_{i=0}^{5} \theta_{ij} \left(\int_0^3 b_i(t)g(t)dt - p\Delta^1 \int_1^3 b_i(t)\, dt - p\Delta^2 \int_2^3 b_i(t)\ dt\right)$$
$$- p\left(\Delta^1\chi_{[1;3]}([t]) + \Delta^2\chi_{[2;3]}([t])\right)) + \frac{2}{9}\beta - \frac{2}{9}p(3-[t])\beta$$

или

$$z(t)=\sum_{j=0}^{5}a_j(t)(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\int_0^3 b_i(t)g(t)dt)$$
$$-p\Delta^1\sum_0^5 a_j(t)(\sum_0^5\theta_{ij}\int_1^3 b_i(t)dt-p\Delta^2\sum_{j=0}^{5}a_j(t)(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\left(\int_2^3 b_i(t)\ dt\right)$$
$$-p(\Delta^1\eta(t-1)-\eta(t-2))\ +\Delta^1(\eta(t-2)-\eta(t-3))\ -(\eta(t-2)-\eta(t-3))$$
$$+\frac{2}{9}\beta-\frac{2}{9}p(3-[t])\beta$$

Подставим $z(t)$ в уравнение (6):

$$\dot{x}\ (t)=\sum_{j=0}^{5}a_j(t)(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\int_0^3 b_i(t)g(t)dt)$$
$$-p\Delta^1\sum_0^5 a_j(t)(\sum_0^5\theta_{ij}\int_1^3 b_i(t)dt-p\Delta^2\sum_{j=0}^{5}a_j(t)(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\left(\int_2^3 b_i(t)\,dt\right)+f(t)$$
$$-p(\Delta^1(\eta(t-1)-\eta(t-2))\ +\Delta^1(\eta(t-2)-\eta(t-3))\ -\Delta^2(\eta(t-2)-\eta(t$$
$$-3))\ +\frac{2}{9}\beta-\frac{2}{9}p(3-[t])\beta-\frac{1}{3}x(0)$$

Проинтегрируем обе части уравнения

$$x(t)=\sum_{j=0}^{5}\int_0^t a_j(s)ds\,(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\int_0^3 b_i(t)g(t)dt)$$
$$-p\Delta^1\sum_0^5\int_0^t a_j(s)ds\,(\sum_0^5\theta_{ij}\int_1^3 b_i(t)dt$$
$$-p\Delta^2\sum_{j=0}^{5}\int_0^t a_j(s)ds\,(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\left(\int_2^3 b_i(t)\,dt\right)+\int_0^t f(s)ds$$
$$-p\left(\Delta^1\int_0^t\big(\eta(s-1)-\eta(s-2)\big)ds\ +\Delta^1\int_0^t(\eta(s-2)-\eta(s-3))ds\right)$$
$$-\Delta^2\int_0^t(\eta(s-2)-\eta(s-3)\Big)ds\ +\frac{2}{9}\beta-\frac{2}{9}p\beta\int_0^t(3-[s])ds-\frac{1}{3}\int_0^t x(0)ds$$

Проинтегрируем обе части равенства от 0 до 3 и находим импульсное управление:

$$\Delta^1\left(p\sum_{j=0}^{5}\left(\int_0^3\int_0^t a_j(s)ds\right)\sum_0^5\theta_{ij}\int_1^3 b_i(t)dt+p\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)$$
$$+\Delta^2(p\sum_{j=0}^{5}\int_0^3\int_0^t a_j(s)ds\,(\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\left(\int_2^3 b_i(t)\,dt\right)+\frac{5}{2}\Bigg)$$
$$=\sum_{j=0}^{5}\left(\int_0^3\int_0^t a_j(s)ds\right)\sum_{i=0}^{5}\theta_{ij}\int_0^3 b_i(t)g(t)dt)\ +\int_0^3\int_0^t f(s)dsdt-\frac{14}{9}p\beta$$

После нахождения импульсного управления в специальных программах, таких как Maple, оно подставляется в уравнение (15). Благодаря этому мы можем решить поставленную задачу.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991, 280 с.

2. Губайдуллина Р.В., Соколов В.А. Об одной задаче импульсного управления в экономической динамике// НАУКА И БИЗНЕС: ПУТИ РАЗВИТИЯ. - 2013. - Вып. 8(26).

3. Губайдуллина Р.В., Соколов В.А. Об одной задаче импульсного управления для модели динамики фондов в двухотраслевой экономике//НАУКА И БИЗНЕС: ПУТИ РАЗВИТИЯ. - 2014. - Вып. 3(33).

4. Максимов В.П., Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Изв. вузов. Математика, 1993, №5. С. 56-71.

5. Максимов В.П. Об одном классе задач управления экономическими системами// Экономическая кибернетика: Математические и инструментальные методы анализа, прогнозирования и управления: Сб. статей/ Перм. ун-т. Пермь, 2002. С.121-133.

6. Симонов П.М. Исследование устойчивости решений некоторых динамических моделей микро- и макроэкономики /П.М. Симонов// Вестник Пермского университета. Математика. Информатика. Механика. – Пермь: Перм. ун-т. Пермь, 2003-С. 88-93.

7. Симонов П.М. Об одном методе исследования динамических моделей микроэкономики// Вестник Пермского университета. Экономика. 2012. Спец. выпуск./Пермь. ун-т. Пермь, 2012.С.50-57.

Рецензенты:

Ёлохова И.В., д.э.н., профессор кафедры экономики и финансов ФГБОУ ВПО "Пермский национальный исследовательский политехнический университет", г. Пермь;

Цаплин А.И. д.т.н., профессор кафедры общей физики ФГБОУ ВПО "Пермский национальный исследовательский политехнический университет", г. Пермь.