

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО ЗАРЯДА КРУГЛОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исаев Ю.Н.¹

¹ФГБОУ ВПО «НИ ТПУ» («Национальный исследовательский Томский политехнический университет»), Томск, Россия (634050, г. Томск, пр. Ленина, 30), e-mail: isaev_yusup@mail.ru

В работе предлагается оригинальный метод расчета распределения зарядов на поверхности проводящей пластины, внесенной во внешнее электростатическое поле. Автору удалось получить полиномы, позволяющие решить интегральное уравнение, связывающее распределение зарядов на поверхности проводящей пластины с распределением потенциала внешнего поля и потенциала на поверхности пластины. Предлагаемые алгоритмы решения справедливы при наличии аксиальной симметрии поля и пластины. Приводятся примеры расчетов распределения зарядов проводника при известном внешнем поле с использованием полиномиального разложения. Приводятся сравнения результатов расчета полиномиального метода с известными аналитическими решениями.

Ключевые слова: распределение зарядов, распределение напряжения, электростатическое поле, проводящая пластина, полиномиальное разложение.

THE CALCULATION OF INDUCED CHARGE DISTRIBUTION OF A ROUND CONDUCTIVE PLATE IN THE PRESENCE OF EXTERNAL ELECTROSTATIC FIELD

Isaev Y.N.¹

¹National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, Russia (634050, Tomsk, Lenin prospect, 30), e-mail: isaev_yusup@mail.ru

The paper proposes an original method of calculating the charge distribution on the surface of the conductive plate entered into the external electrostatic field. The author managed to get the polynomials which allow to solve the integral equation which establishes the relationship between charge distribution of the conductive plate and the potential distribution of the external field and the potential on the surface of the plate. The proposed algorithms solutions are valid in the presence of axial symmetry of the field and the plate. Examples of calculation of conductor charge distribution in the presence of external field by using a polynomial expansion have been presented. The comparisons of results calculated by polynomial method and by known analytical solutions have been given.

Keywords: charge distribution, voltage distribution, electrostatic field, conductive plate, polynomial expansion.

При внесении проводящей пластины во внешнее электростатическое поле на поверхности пластины индуцируются электрические заряды. Соотношение, связывающее потенциал внешнего поля $U^0(\mathbf{r}_0)$ и потенциал на поверхности проводящей пластины U_0 с распределением индуцированного заряда, можно записать в виде [3, 4]:

$$-U^0(\mathbf{r}_0) + U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \{x, y\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in D \quad (1)$$

Таким образом, при известном распределении зарядов $\sigma(\mathbf{r})$ на поверхности проводящей пластины можно определить алгебраическую сумму распределения потенциала внешнего поля $U^0(\mathbf{r}_0)$ и потенциала на поверхности пластины U_0 . В натуральных экспериментах обычно известно распределение потенциала внешнего поля, потенциал поверхности проводника всегда можно измерить или удерживать его под постоянным

напряжением. Поэтому представляет интерес обратная задача – задача определения распределения зарядов на поверхности проводника. В соответствии с выражением (1) нужно решить интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно искомой величины $\sigma(\mathbf{r})$. Величина $\sigma(\mathbf{r})$ есть суммарное распределение зарядов на проводнике с разных сторон пластины, и поэтому следующий шаг заключается в разделении зарядов соответствующих стороне, обращенной к источнику поля и противоположной стороне. Для разделения зарядов необходимо использовать нормальную составляющую напряженности результирующего поля

$$E_n(\mathbf{r}) = -(\nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{n}) = -\frac{\partial}{\partial z} U(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Напряженность поля связана с зарядами соотношениями:

$$2\varepsilon_0 E_n(\mathbf{r}) = \sigma_1(\mathbf{r}) - \sigma_2(\mathbf{r}), \quad \sigma(\mathbf{r}) = \sigma_1(\mathbf{r}) + \sigma_2(\mathbf{r}), \quad (3)$$

из которых можно получить:

$$\sigma_1(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r}) + 2\varepsilon_0 E_n(\mathbf{r})}{2}, \quad \sigma_2(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r}) - 2\varepsilon_0 E_n(\mathbf{r})}{2}. \quad (3)$$

Цель работа заключается в том, чтобы заменить сложное интегральное уравнение (1) алгебраическим с помощью полученных автором полиномов, то есть получить аналитические соотношения, связывающие потенциал результирующего поля и распределение зарядов на проводнике.

Постановка задачи. Будем предполагать, что внешнее поле обладает симметрией вращения относительно оси симметрии диска. Тогда уравнение (1) может быть переписано в виде

$$U(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\vartheta' \int_0^R \frac{\sigma(\rho') \rho' d\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\vartheta - \vartheta')}} , \quad (4)$$

здесь $U(\rho) = -U^0(\rho) + U_0$ – результирующий потенциал.

Последнее выражение можно переписать с использованием эллиптического интеграла

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{1 - k \cos(\vartheta')}} \quad \text{тогда соотношение (4) преобразуется в следующее выражение}$$

$$U(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \rho' d\rho' \sigma(\rho') \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\vartheta - \vartheta')}} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{\rho' \sigma(\rho')}{\rho' + \rho} K\left(\frac{2\sqrt{\rho'\rho}}{\rho' + \rho}\right) d\rho'. \quad (5)$$

Учитывая преобразование Ландена [2,3,4] можно получить следующее свойство эллиптического интеграла:

$$\frac{1}{x} K\left(\frac{y}{x}\right) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{(x^2 - s^2)(y^2 - s^2)}}. \quad (6)$$

Полученное свойство позволяет записать неизвестную подынтегральную функцию $\sigma(\rho)$ через известный потенциал $U(\rho)$:

$$\sigma(\rho) = -\frac{4\epsilon_0}{\pi\rho} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^R \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - \rho^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{U(t) dt}{\sqrt{s^2 - t^2}} \quad (7)$$

Определим распределение зарядов, порожденное потенциалом вида

$$U(\rho) = \rho^m \quad (8)$$

После подстановки (8) в (7) получаем выражения для распределения зарядов в виде полиномов $\psi_m(\rho)$ при четных и нечетных m соответственно:

$$\sigma(\rho) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{M(1,1)}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \quad \text{при } m = 1, \\ -N(m,1) \sum_{k=0}^{m/2} c\left(\frac{m}{2}, k\right) \frac{(R^2 - \rho^2)^{k-\frac{1}{2}} (\rho^{-2} m R^2 - m - 2\rho^{-2} k R^2 - 1) \rho^{-2k+m}}{2k+1} \\ \quad \text{при } m - \text{четном}, \\ -\frac{M(m,1)}{m+1} \left(\frac{-R^m}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F_2\left(\frac{m+1}{2}, k\right)}{2^k F_1\left(\frac{m+1}{2}, k\right)} \cdot \left(2k\rho^{2k-2} \sqrt{R^2 - \rho^2} - \frac{\rho^{2k}}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) R^{m-2k} \right) + \\ -\frac{F(m)M(m,1)}{2^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{m+1}{2}\right)!} \left[\ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}\right) \rho^{m-1} (m+1) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \frac{\rho^{(m+1)}}{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}} + \rho^{(m+1)} \right) \right] \\ \quad \text{при } m - \text{нечетном}. \end{array} \right.$$

Здесь

$$F(m) = \prod_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} 2k+1, \quad F1(m,k) = \prod_{s=1}^k m-s, \quad F2(m,k) = \prod_{s=1}^k 2m-2s+1,$$

$$c(m,k) = \frac{m}{(k-m)!k!},$$

$$M(m,s) = \frac{F(m)s^m \pi(m+1)}{2^{\frac{m+3}{2}} \left(\frac{m+1}{2}\right)!}, \quad N(m,s) = (m+1)s^m \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^k}{2k+1} c\left(\frac{m}{2}, k\right).$$

Приведем несколько четных степеней

| ρ^m | $\Psi_m(\rho)$ |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$ |
| ρ^2 | $-\frac{2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{R^2 - 2\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$ |
| ρ^4 | $-\frac{8}{9} \cdot \frac{4\rho^2 R^2 - 8\rho^4 + R^4}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$ |
| ρ^6 | $-\frac{16}{25} \cdot \frac{8\rho^4 R^2 - 16\rho^6 + 2\rho^2 R^4 + R^6}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$ |

и нечетных степеней

| ρ^m | $\Psi_m(\rho)$ |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ρ | $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} - \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho} \right) \right)$ |
| ρ^3 | $-\frac{3}{8} \pi \left(\frac{(R^2 - 3\rho^2)R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + 3\rho^2 \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho} \right) \right)$ |
| ρ^5 | $-\frac{15}{128} \pi \left(\frac{(2R^4 + 5R^2\rho^2 - 15\rho^4)R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + 15\rho^4 \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho} \right) \right)$ |
| ρ^7 | $-\frac{35}{1536} \pi \left(\frac{(8R^6 + 14\rho^2 R^4 + 35\rho^4 R^2 - 105\rho^6)R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + 105\rho^6 \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho} \right) \right)$ |

Используя табличные соотношения, можно определить интересующее нас распределение зарядов при известном распределении потенциала. Для этого необходимо представить распределение потенциалов поля в виде разложения по многочленам

$$U(\rho) = \sum_{m=0}^N a_m \rho^m. \quad (9)$$

Коэффициенты разложения ряда (9) легко определить, используя методом наименьших квадратов. Распределение зарядов при этом определяется соотношением:

$$\sigma(\rho) = \frac{4\epsilon_0}{\pi} \sum_{m=0}^N a_m \psi_m(\rho). \quad (10)$$

Вид полиномов ряда (8) определяется выражением из таблицы.

В случае диска с отверстием в выражении (5) изменятся пределы интегрирования:

$$U(\rho) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{\rho' \sigma(\rho')}{\rho' + \rho} K\left(\frac{2\sqrt{\rho'\rho}}{\rho' + \rho}\right) d\rho'. \quad (11)$$

В этом случае нет необходимости рассчитывать новые полиномы для разложения распределения зарядов. Достаточно осуществить необходимое преобразование системы координат, заключающееся в проецировании внешней области круга на внутреннюю область. Путем замены переменных перейдем от интегрального выражения (11) к интегральному выражению (5), с помощью сопряженных координат:

$$\rho' = \frac{r^2}{t'}, \quad \rho = \frac{r^2}{t}. \quad (12)$$

В результате получим интегральное выражение с новыми пределами интегрирования

$$U_1(t) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{\sigma_1(t') t'}{(t' + t)} K\left(\frac{2\sqrt{t \cdot t'}}{t + t'}\right) dt' \quad \text{где} \quad \sigma_1(t') = \frac{r^2 \sigma(r^2 / t')}{t'^3}, \quad U_1(t) = U\left(\frac{r^2}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} \quad (13)$$

В качестве работы полиномиального алгоритма рассмотрим примеры, имеющие аналитическое решение [1, 2].

Пример 1: Определим распределение зарядов на заземленном диске радиуса $R = 1$ м, если диск помещен во внешнее поле точечного заряда, расположенного на оси диска на расстоянии $h = 0,3$ м от поверхности диска. Отношение q / ϵ_0 в задаче выберем 1.

Потенциал точечного заряда в плоскости диска и суммарное распределение зарядов на диске определяются выражениями соответственно [1]:

$$U(\rho) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}, \quad \sigma(\rho) = -\frac{h}{2\pi^2 (h^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R^2 - \rho^2}{h^2 + \rho^2}} + \sqrt{\frac{h^2 + \rho^2}{R^2 - \rho^2}} \right). \quad (15)$$

Представим потенциал в виде ряда:

$$U(\rho) = \sum_{m=0}^N a_m \rho^m, \quad (16)$$

Определим коэффициенты разложения (12), используя метод наименьших квадратов. Для этого зададимся числом коэффициентов разложения $N = 10$.

$$m = 0 \dots N, n = m, c_m = \int_0^R U(\rho) \rho d\rho, b_{m,n} = \int_0^R \rho^{m+n+1} d\rho = \frac{R^{m+n+1}}{m+n+1}$$

Определяем коэффициенты разложения a_m , решая матричное уравнение:

$$c_m = b_{m,n} a_n \rightarrow a_n = \text{Re} \left[(b_{m,n} + jI_{m,n} \lambda)^{-1} \right] c_m,$$

I – единичная матрица, $j = \sqrt{-1}$, $\lambda = 10^{-19,25}$ – параметр регуляризации, уменьшающий относительный вклад шумовой составляющей в решении [1, 5].

В результате численного расчета коэффициентов c_m получаем коэффициенты разложения

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-------|---|-------|--------|------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|
| a_m | 0,265 | 0 | -1.43 | -1.438 | 29.7 | -104.7 | 198.4 | -229.6 | 162.7 | -65.06 | 11.273 |

А искомое поверхностное распределение зарядов $\sigma(\rho)$ будет определяться выражением с

$$\text{рассчитанными коэффициентами: } \sigma(\rho) = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \sum_{m=0}^N a_m \Psi_m(\rho).$$

Результаты расчетов приведены на рисунке:

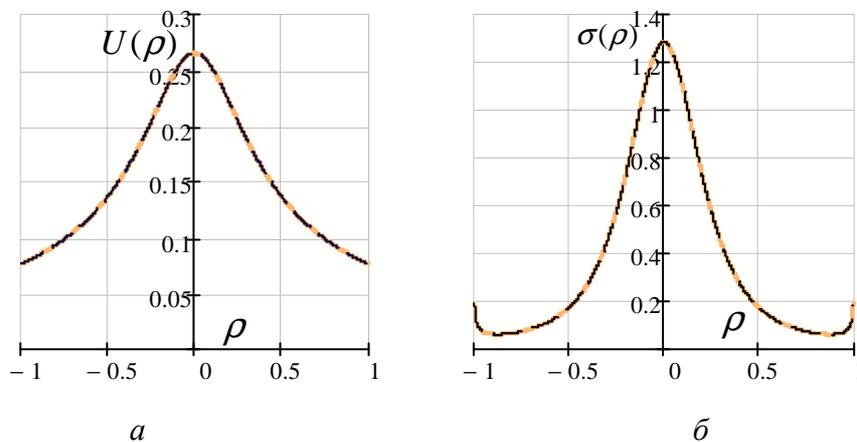


Рис 1. а) потенциал внешнего поля как аналитическая функция и результат ее разложения в ряд (12),
 б) распределение зарядов как аналитическая зависимость и результат восстановления в виде ряда (13)

На рисунках демонстрируется хорошее совпадение аналитических зависимостей и зависимостей, полученных полиномиальным методом.

Пример 2: Определим распределение зарядов на поверхности проводящего диска с круговым отверстием $r = 0,25$ м, если диск помещен во внешнее поле точечного заряда,

расположенного на оси диска на расстоянии $h = 0,4$ м от поверхности диска с радиусом $R = 1$ м.

Потенциал точечного заряда в плоскости диска и суммарное распределение зарядов на диске определяются выражениями соответственно [3,4]:

$$U(\rho) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}, & \rho \geq r \\ 0, & \rho < r \end{cases}, \quad \sigma(\rho) = -\frac{h}{\pi^2 (h^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{h}{r} \sqrt{\frac{\rho^2 - r^2}{h^2 + \rho^2}} + \frac{r}{h} \sqrt{\frac{h^2 + \rho^2}{\rho^2 - r^2}} \right). \quad (17)$$

В данном случае будет использоваться уравнение (5) с заменой переменных:

$$\rho' = \frac{r^2}{t'}, \quad \rho = \frac{r^2}{t}. \quad (18)$$

В результате получаем интегральное выражение с новыми пределами интегрирования

$$U\left(\frac{r^2}{t}\right) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{\frac{r^2}{t'} \sigma\left(\frac{r^2}{t'}\right)}{\frac{r^2}{t'} + \frac{r^2}{t}} K\left(\frac{2\sqrt{\frac{r^2}{t'} \cdot \frac{r^2}{t}}}{\frac{r^2}{t'} + \frac{r^2}{t}}\right) d\frac{r^2}{t'}. \quad (19)$$

Упрощая выражение (19), получаем

$$U1(t) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{\sigma1(t') t'}{(t'+t)} K\left(\frac{2\sqrt{t \cdot t'}}{t+t'}\right) dt', \quad \text{где } \sigma1(t') = \frac{r^2 \sigma\left(\frac{r^2}{t'}\right)}{t'^3}, \quad U1(t) = U\left(\frac{r^2}{t}\right) \cdot \frac{1}{t}. \quad (20)$$

Представим потенциал поля $U1(t)$ в виде ряда

$$U1(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^N a_m t^m \quad (21)$$

По тому же алгоритму определяем коэффициенты разложения a_m , затем, используя таблицу полиномов и используя замену переменной в виде $t = r^2 / \rho$, находим

$$\sigma1(\rho) = \frac{2\epsilon_0}{\pi} \sum_{m=0}^N a_m \Psi_m(\rho), \quad \sigma\left(\frac{r^2}{t}\right) = \sigma1(t) \cdot \frac{t^3}{r^2}, \quad \sigma(\rho) = \sigma1\left(\frac{r^2}{\rho}\right) \cdot \frac{r^4}{\rho^3}. \quad (22)$$

Полученное распределение зарядов $\sigma(\rho)$ на поверхности проводника приведено на рисунке 2, там же приведен результат, полученный по аналитической формуле [3,4].

$$\sigma(\rho) = -\frac{h}{\pi^2 (h^2 + \rho^2)^{3/2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{h}{r} \sqrt{\frac{\rho^2 - r^2}{h^2 + \rho^2}} + \frac{r}{h} \sqrt{\frac{h^2 + \rho^2}{\rho^2 - r^2}} \right).$$

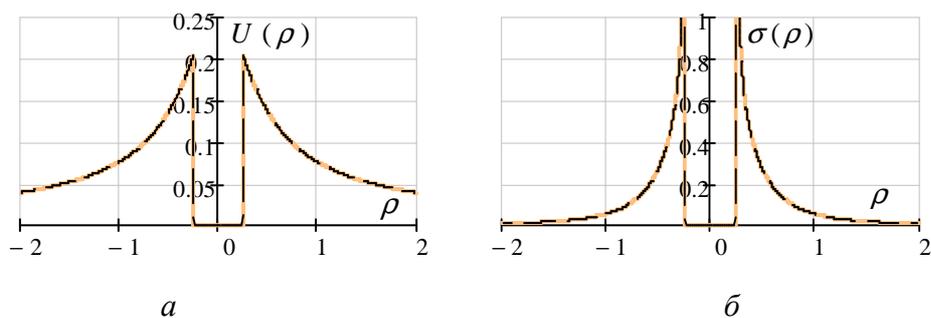


Рис. 2. а) потенциал внешнего поля как аналитическая функция и результат ее разложения в ряд (21),
 б) распределение зарядов как аналитическая зависимость и результат восстановления в виде ряда (22) при $\lambda = 10^{-12}$ – параметр регуляризации

Выводы

Автору удалось получить полиномы, позволяющие свести интегральное уравнение, связывающее распределения зарядов на пластине с внешним статическим полем, к более простому алгебраическому уравнению. Полиномиальный алгоритм справедлив при аксиально симметричном внешнем поле и аксиально симметричной форме пластины. При использовании полиномиального метода необходимо производить регуляризацию коэффициентов разложения для уменьшения влияния шумов алгоритма.

Список литературы

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка. 1986, –543с.
2. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. 1977, –832с.
3. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высшая школа. 1963, –414с.
4. Пименов Ю.В. Линейная макроскопическая электродинамика. Долгопрудный: Интеллект. 2008, –535 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука 1979, – 285 с.

Рецензенты:

Усов Ю.П., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», г. Томск;

Сивков А.А., д.т.н., профессор кафедры ЭПП ЭНИН ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», г. Томск.