

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТРАНСФОРМАТОРНОЙ ОБМОТКЕ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ ОБМОТКИ

Старцева Е.В.¹, Щекотуев А.В.¹, Исаев Ю.Н.¹

¹ ФГАОУ ВО «НИ ТПУ» («Национальный исследовательский Томский политехнический университет»), Томск, Россия (634050, Томск, пр. Ленина, 30), e-mail: isaev_yusup@mail.ru

В работе предлагается рассматривать обмотку трансформатора как систему с распределенными параметрами, что позволяет изучить распределение тока и напряжения в обмотке как волновой процесс. В работе рассматриваются волновые процессы в обмотке трансформатора с различными краевыми условиями на ее конце. Приводится вывод передаточной функции обмотки трансформатора. Демонстрируется полезность передаточной функции для получения начальных условий распределения напряжения на обмотке, а также установившегося распределения напряжения на обмотке для различных краевых условий. Приводятся решения задач переходного процесса относительно распределения напряжения и обсуждаются возможные пути преодоления перенапряжений в обмотке трансформатора. Приводится расчет распределения оптимальной емкости вдоль обмотки для снижения перенапряжений вдоль обмотки трансформатора.

Ключевые слова: обмотка трансформатора, волновые процессы, распределенные параметры, передаточная функция

TRANSIENT PROCESSES IN TRANSFORMER WINDING WITH CONSIDERING THE DISTRIBUTION OF WINDING PARAMETERS

Startseva E.V.¹, Schekotuev A.V.¹, Isaev Y.N.¹

¹National research Tomsk polytechnic university, Tomsk, Russia (634050, Tomsk, Lenin prospect, 30), e-mail: isaev_yusup@mail.ru

In this paper we propose to consider the transformer as a system with distributed parameters, which allows us to consider the distribution of current and voltage in the coil as a wave process. The paper deals with wave processes in the transformer winding with various boundary conditions at its end. The transfer function of the transformer winding has been obtained. The usefulness of the transfer function for obtaining the initial conditions of voltage distribution on the winding, as well as a steady state voltage distribution on winding for different boundary conditions have been demonstrated. The solutions of problems regarding the distribution of transient voltage has been presented. The possible ways to overcome the surge in the transformer have been discussed. The calculation of the distribution of optimal capacity along the winding to reduce surge voltages along the winding of the transformer has been provided

Keywords: the transformer winding, wave processes, distributed parameters, the transfer function

Одним из основных узлов электрических сетей является трансформатор. При исследовании трансформатора его обмотки принято представлять в виде электрической схемы замещения с сосредоточенными параметрами. Более точная схема замещения должна быть схемой с распределенными параметрами [1, 2]. Особенно это проявляется при диагностике трансформатора с короткими импульсами, пространственная длительность которых много меньше длины обмотки трансформатора [3, 6]. При представлении обмоток трансформатора в виде схемы с распределенными параметрами приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных, что гораздо сложнее, чем решать обыкновенные дифференциальные уравнения, возникающие в схемах с сосредоточенными параметрами. Эта сложность проявляется при внесении дополнительной пространственной координаты, которая преобразует схему с сосредоточенными параметрами в схему с

распределенными параметрами. Но при этом появляется возможность пространственной локализации повреждений трансформаторных обмоток, что очень важно при его диагностике [1, 3, 6]. Кроме того, в распределенных схемах переходные процессы, происходящие в обмотках трансформатора, можно представить в виде распространения волн, получая при этом более богатую физическую картину явления [3, 5], а следовательно, и более детальное исследование трансформаторных обмоток при аварийных режимах.

Цель работы заключается:

- в представлении обмотки трансформатора в виде распределенной электрической цепи и исследовании переходных процессов такой цепи в двух случаях: при заземленном конце обмотки и при разомкнутом конце обмотки;
- в определении начального и установившегося распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора при заземленном конце обмотки и при разомкнутом конце обмотки;
- в поиске возможных путей преодоления перенапряжений, возникающих вдоль обмотки трансформатора.

Постановка задачи и основные соотношения

Электрическую схему с распределенными параметрами можно представить в виде приведенной на рисунке 1, где R, L_0 – индуктивность и сопротивления на единицу длины обмотки, C_1 – емкость на единицу длины обмотки, C_2 – емкость обмотки на единицу длины относительно земли.

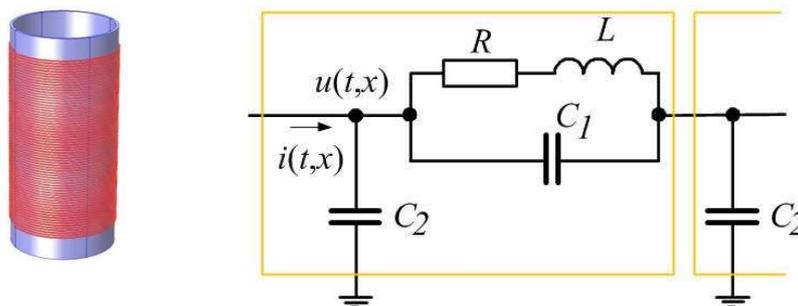


Рис. 1. Обмотка трансформатора и схема замещения элемента обмотки

В соответствии со схемой замещения элемента обмотки трансформатора (см. рис. 1) уравнение трансформаторной обмотки как распределенной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R i(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[L_0 C_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R C_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + u(x,t) \right]; \\ C_2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

Для решения этих уравнений будем использовать операторный метод расчета [4, 5].

Перейдем от оригиналов тока и напряжения к их операторным изображениям, предполагая нулевые начальные условия, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (L_o p + R) I(x, p) = - (L_o C_1 p^2 + RC_1 p + 1) \frac{d}{dx} U(x, p); \\ p C_2 U(x, p) = - \frac{dI(x, p)}{dx}. \end{cases} \quad (2)$$

Система уравнений (2) может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} U(x, p) - \gamma^2 U(x, p) = 0; \\ \frac{d^2}{dx^2} I(x, p) - \gamma^2 I(x, p) = 0, \end{cases} \quad \text{где } \gamma = \frac{\sqrt{(pL_o + R) p C_2}}{\sqrt{p^2 L_o C_1 + pRC_1 + 1}}. \quad (3)$$

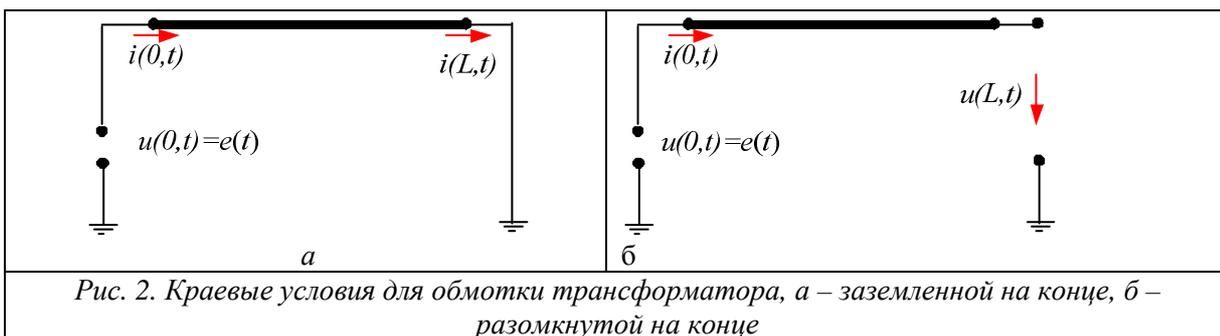
Решения уравнений будем искать в виде [1]:

$$\begin{cases} U(x, p) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}; \\ I(x, p) = - \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{Z_w}. \end{cases} \quad (4)$$

Где Z_w волновое сопротивление обмотки, определяемое соотношением:

$$Z_w = \frac{pL_o + R}{(p^2 L_o C_1 + pRC_1 + 1) \gamma} = \frac{\sqrt{\frac{pL_o + R}{p C_2}}}{\sqrt{p^2 L_o C_1 + pRC_1 + 1}}$$

Найдем константы интегрирования A_1, A_2 из краевых условий, предполагая, что в конце обмотка заземлена (см. рисунок 2, а), а к началу обмотки подается напряжение $E(p)$, тогда система уравнений (4) может быть переписана:



$$\begin{cases} E = A_1 + A_2; \\ 0 = A_1 e^{\gamma L} + A_2 e^{-\gamma L}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\gamma L} & e^{-\gamma L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{E(p) e^{-\gamma L}}{sh(\gamma L)} \\ A_2 = - \frac{E(p) e^{\gamma L}}{sh(\gamma L)} \end{cases} \end{cases}$$

Здесь L – длина трансформаторной обмотки.

Подставляя значения коэффициентов A_1 и A_2 , получаем выражения для напряжения и тока вдоль обмотки при ее заземленном конце:

$$U(x, p) = \frac{E(p)sh(\gamma(L-x))}{sh(\gamma L)}, \quad I(x, p) = \frac{E(p)ch(\gamma(L-x))}{Z_w sh(\gamma L)}. \quad (5)$$

Аналогично находим коэффициенты для случая, когда обмотка разомкнута на конце (см. рис. 2, б)

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2; \\ IZ_w = 0 = A_1 e^{\gamma L} - A_2 e^{-\gamma L}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\gamma L} & -e^{-\gamma L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 = \frac{E(p)e^{-\gamma L}}{ch(\gamma L)} \\ A_2 = \frac{E(p)e^{\gamma L}}{ch(\gamma L)} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Подставляя значения коэффициентов, получаем выражения для напряжения и тока вдоль обмотки при ее разомкнутом конце:

$$U(x, p) = \frac{E(p)ch(\gamma(L-x))}{ch(\gamma L)}, \quad I(x, p) = \frac{E(p)sh(\gamma(L-x))}{Z_w ch(\gamma L)}. \quad (6)$$

Если на вход устройства подать напряжение равное дельта функции Дирака:

$$u(0, t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{если } t = 0; \\ 0 & \text{если } t \neq 0, \end{cases}$$

то в пространстве изображений в место $E(p)$ нужно подставить единицу [5].

Таким образом, получаем передаточные функции для напряжений при заземленном и свободном концах обмотки трансформатора соответственно.

$$W_u(x, p) = \frac{sh(\gamma(L-x))}{sh(\gamma L)}, \quad W_u(x, p) = \frac{ch(\gamma(L-x))}{ch(\gamma L)}.$$

С помощью полученных передаточных функций легко получить установившийся и начальный режимы работы обмотки трансформатора [5]. Учитывая, что при $p \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$, по уравнению (3) в установившемся режиме работы обмотки трансформатора при ее заземленном конце мы получаем:

$$u_{уст}(x) = \lim_{p \rightarrow 0} W_u(x, p) = \frac{sh(\gamma(L-x))}{sh(\gamma L)} = \frac{L-x}{L} = 1 - \frac{x}{L}, \quad (7)$$

при ее разомкнутом конце:

$$u_{уст}(x) = \lim_{p \rightarrow 0} W_u(x, p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{ch(\gamma(L-x))}{ch(\gamma L)} = 1. \quad (8)$$

В другом предельном случае при $p \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \frac{1}{L} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ по уравнению (3) можно получить начальное распределение напряжения [5] $u(x, 0) = u_{HAЧ}$ в обмотке трансформатора при ее заземленном конце:

$$u_{HAЧ}(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} W_u(x, p) = \frac{sh(\gamma(L-x))}{sh(\gamma L)} = \frac{sh\left(\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}(1-x/L)\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right)}, \quad (9)$$

при ее разомкнутом конце:

$$u_{HAЧ}(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} W_u(x, p) = \frac{ch(\gamma(L-x))}{ch(\gamma L)} = \frac{ch\left(\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}(1-x/L)\right)}{ch\left(\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right)}. \quad (10)$$

Теперь найдем распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора при воздействии постоянного напряжения в ее начале и при условии заземленного конца обмотки трансформатора. Для этого нужно найти оригинал произведения передаточной функции, умноженной на изображение постоянного напряжения E :

$$\frac{E}{p} W_u(x, p) = \frac{E}{p} \frac{sh(\gamma(L-x))}{sh(\gamma L)},$$

Корни характеристического уравнения определяются следующим образом:

$$p = 0, \quad sh(\gamma p) = 0 \rightarrow \gamma_k = jk\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\frac{\sqrt{(L_o p_k + R) p_k C_2}}{\sqrt{L_o C_1 p_k^2 + R C_1 p_k + 1}} = j \frac{k\pi}{L} \rightarrow p_k = -\frac{R}{2L_o} \pm j\beta_k,$$

где β_k — собственная частота, определяемая соотношением $\beta_k = \frac{k\pi}{\sqrt{L_o(L^2 C_2 + k^2 \pi^2 C_1)}}$.

Тогда выражение для распределения напряжения вдоль обмотки можно записать в виде:

$$\frac{u(x, t)}{E} = 1 - \frac{x}{L} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sh(\gamma_k(L-x))e^{p_k t}}{p_k L ch(\gamma_k L) \left(\frac{d\gamma}{dp}\right)_{p=p_k}} = 1 - \frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} e^{-\frac{R}{2L_o} t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos(\beta_k t)}{k \left(1 + \frac{C_1}{C_2} k^2 \pi^2\right)} \quad (11)$$

Результат расчета распределения напряжения по формуле (11) при параметрах обмотки $L = 1$ м, $L_o = 0,1$ Гн, $C_1 = 2000$ пф, $C_2 = 25$ пф, $R = 10$ Ом, $E = 1$ В приведен на рисунке

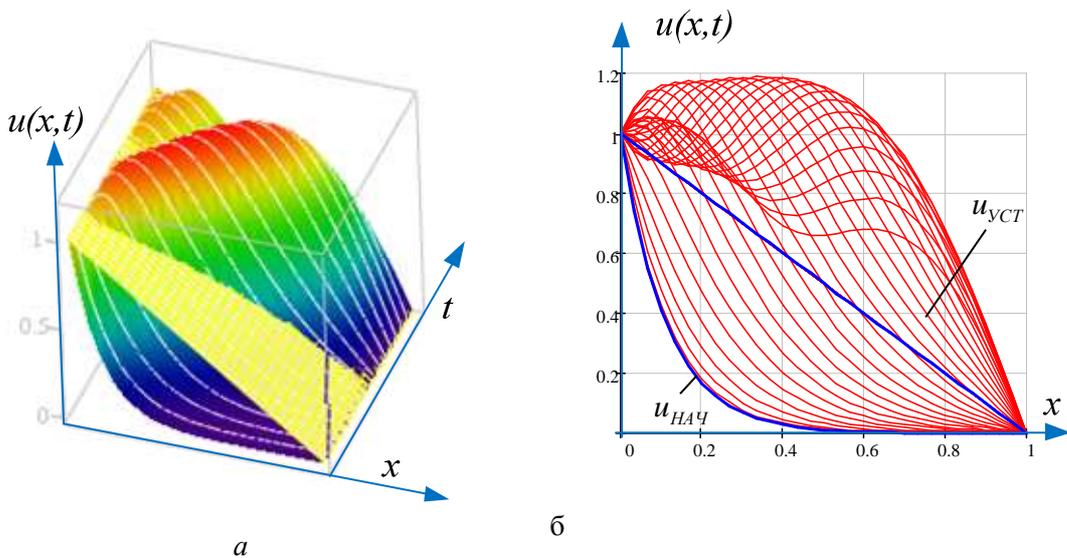


Рис 3. а – Пространственно-временная картина распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора. Для сравнения указана плоскость установившегося режима;
 б – Та же картина в профиль. Жирные линии показывают начальное значение напряжения $u_{HA\Psi}$ и напряжение при установившемся режиме $u_{УСТ}$ (обмотка заземлена на конце)

Продлав аналогичные операции можно получить распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора в случае разомкнутой на конце обмотки:

$$\frac{u(x,t)}{E} = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{ch(\gamma_k(L-x))e^{p_k t}}{p_k L sh(\gamma_k L) \left(\frac{d\gamma}{dp} \right)_{p=p_k}} = 1 - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{R}{2L_0}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)\frac{x\pi}{L}\right) \cos(\beta_k t)}{(2k+1) \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \pi^2 \right)}. \quad (12)$$

Здесь коэффициенты β_k определяются выражением $\beta_k = \frac{\left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi}{\sqrt{L_0 \left(L^2 C_2 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \pi^2 C_1 \right)}}$.

Результат расчета распределения напряжения по формуле (12) при параметрах обмотки $L = 1$ м, $L_0 = 0,1$ Гн, $C_1 = 2000$ пф, $C_2 = 25$ пф, $R = 10$ Ом, $E = 1$ В приведен на рисунке 4.

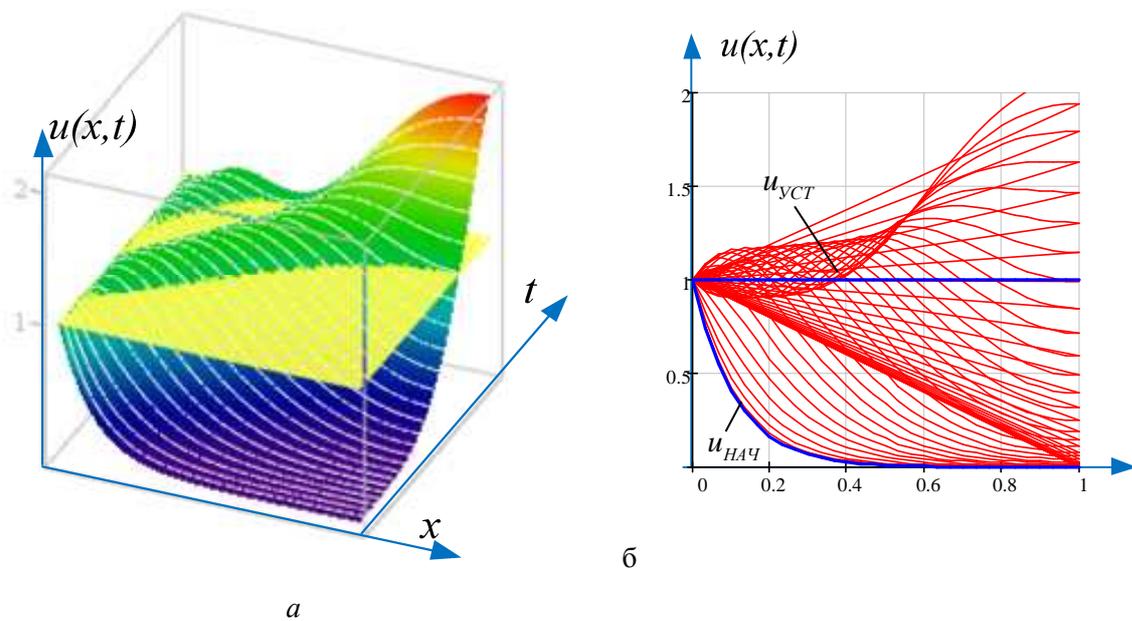


Рис. 4. а – Пространственно-временная картина распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора. Для сравнения указана плоскость установившегося режима.
 б – Та же картина в профиль. Жирные линии показывают начальное значение напряжения $u_{НАЧ}$ и напряжение при установившемся режиме u_{VCT} (обмотка разомкнута на конце)

Перенапряжения, возникающие вдоль обмотки трансформатора, определяются начальным и конечным распределением напряжения, а также величинами элементов распределенной схемы. Поставим задачу минимизации перенапряжения вдоль обмотки. Для этого запишем дифференциальное уравнение для передаточной функции напряжения, переписав систему (2) в предположении, что величинами элементов можно варьировать:

$$\frac{d}{dx} \frac{L_0 C_1 p^2 + RC_1 p + 1}{L_0 p^2 + Rp} \frac{d}{dx} U(x,p) - C_2 U(x,p) = 0.$$

Умножая уравнение на p и устремляя p к бесконечности, получаем в случае заземленной обмотки:

$$\frac{d}{dx} C_1(x) \frac{d}{dx} U_{VCT}(x) - C_2(x) U_{VCT}(x) = 0, \quad U_{VCT}(x) = E \left(1 - \frac{x}{L} \right),$$

и уравнение для емкости и его решение:

$$\frac{d}{dx} C_1(x) + C_2 L \left(1 - \frac{x}{L} \right) = 0 \rightarrow C_1(x) = C_2 \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) + const$$

Постоянную надо выбирать так, чтобы при всех возможных x емкость C_1 была положительна и превышала естественную емкость обмотки C_1 .

Выводы

Авторами получена передаточная функция распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора, позволяющая определять:

- начальное и установившееся распределение напряжений;
- перенапряжения при переходных режимах;

- оптимальные значения распределенных емкостей.

Эта функция позволяет минимизировать перенапряжения вдоль обмотки.

Чтобы снизить перепады напряжения, можно использовать дополнительные емкости, включая их между обмотками катушки, или создавать кольцевые экраны, охватывающие часть обмотки катушек.

Список литературы

1. Геллер Б., Веверка А. Импульсные процессы в электрических машинах. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
2. Геллер Б., Веверка А. Волновые процессы в электрических трансформаторах – М.: Государственное энергетическое издательство, 1960. – 632 с.
3. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Елгина Г.А., Лавринович А.В. Математическая модель трансформатора при его диагностике коротким импульсом // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6; URL: www.science-education.ru/113-10526 (дата обращения: 15.04.2015).
4. Исаев Ю.Н., Купцов А.М. Практика использования системы MathCAD в расчетах электрических и магнитных цепей. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2013. –180 с.
5. Исаев Ю.Н. Системы автоматического управления. — Томск: Изд-во ТПУ, 2013. 2003. – 142 с.
6. Колчанова В.А., Исаев Ю.Н., Елгина Г.А. Моделирование трансформаторной обмотки при воздействии импульса напряжения в среде MATLAB Simulink //Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6; URL: www.science-education.ru/113-10763 (дата обращения: 15.04.2015).

Рецензенты:

Усов Ю.П., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГАОУ ВО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск;

Курец В. И., д.т.н., профессор кафедры ЭСиЭ ЭНИН ФГАОУ ВО «НИ ТПУ», Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск.