УДК 517.91: 518.1

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО КОМПЬЮТЕРНОМУ АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ромм Я.Е., Заярный В.В.

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия (347936, Ростовская область, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), e-mail: romm@list.ru

Представлены результаты численного эксперимента по компьютерному анализу устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Анализ выполнен для случая матриц постоянных коэффициентов на основе критериев общего вида, не использующих сведения о корнях характеристических полиномов. В работе в общем виде излагается теоретическое обоснование подхода, включающее случаи нелинейных и линейных систем с переменными коэффициентами. Подход опирается на рекуррентные преобразования разностного решения системы и позволяет получать оценки устойчивости по ходу решения системы в реальном времени. Целью эксперимента являлось определение границ изменения шага разностного метода при сохранении достоверности компьютерной оценки устойчивости, результат указывает на возможность правильной оценки при вариации шага метода Эйлера в пределах нескольких десятичных порядков.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, обыкновенные дифференциальные уравнения, разностные методы, численное моделирование, компьютерная оценка устойчивости, линейные системы.

NUMERICAL EXPERIMENT UNDER THE COMPUTER ANALYSIS OF A STABILITY OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Romm Y.E., Zayarny V.V.

Taganrog Institute of Chekhov A.P. (branch) RGEU (RINH), Taganrog, Russia, (347936, Taganrog, Iniciativnaya str., 48), e-mail: romm@list.ru

The results of numerical experiment on the computer analysis of the stability of systems of linear differential equations are presented. The analysis is performed for the case of constant coefficients matrix based on the criteria of general type, do not use the information on the roots of the characteristic polynomial. The work in general presents a theoretical rationale for the approach includes the case of non-linear and linear systems with variable coefficients. The approach is based on the recurrence of the difference solutions of systems. The approach allows to obtain estimates of stability for systems in real time. The aim of the experiment was to determine the boundaries of variation of the step of the difference method, while maintaining the reliability of a computer estimation of stability. The result of a numerical experiment indicates the possibility of a correct assessment with variation step of Euler's method within several decimal orders.

Keywords: Lyapunov stability, ordinary differential equations, difference methods, numerical modeling, a computer estimation of a stability, linear systems

Постановка вопроса. Традиционно анализ устойчивости по Ляпунову (ниже устойчивости) строится на основе качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В [3–5] показана возможность численного моделирования устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений ОДУ. Такая возможность обусловлена тем, что при условии устойчивости разностные методы накапливают погрешность не более чем линейно по длине промежутка решения [2–4] (доказательства содержатся в [2] и [6, 7]). В статье представлены критерии устойчивости, основанные на рассматриваемых преобразованиях, и результаты численного моделирования. Основная задача излагаемого сообщения заключается в анализе достоверности предложенных критериев устойчивости линейных систем в зависимости от шага разностного метода.

Исходные предположения. Рассматривается задача Коши для системы

$$\frac{dY}{dt}=F(t,Y),\quad Y(t_0)=Y_0 \qquad (1)$$

где $F(t,Y)=(f_1(t,Y),f_2(t,Y),\dots,f_n(t,Y))$, $Y=(y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t))$, $Y_0=(y_{01},y_{02},\dots,y_{0n})$. Предполагается, что существует $\delta_0>0$, при котором все условия существования и единственности выполнены для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0,\infty)$ и для каждого его возмущения $Y=\tilde{Y}(t)$, $Y(t_0)=\tilde{Y}_0$, с начальным вектором из окрестности $\|\tilde{Y}_0-Y_0\|\le\delta_0$. Здесь и ниже рассматриваются канонические согласованные нормы матрицы и вектора. Предполагается, что в области $B=\{t_0\le t<\infty,\ \|\tilde{Y}_0-Y_0\|\le\delta_0\}$ функция $F(t,Y)$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по независимой переменной (в точке t_0 – справа), компоненты этой функции удовлетворяют неравенству:

$$\left|f'_k(t,\tilde{Y}(t))\right|\le C,\quad k=1,\dots,n,\quad (t,\tilde{Y}(t))\in B. \qquad (2)$$

Определение устойчивости [9] упрощено в принятых ограничениях: решение $Y=Y(t)$ устойчиво, если $\forall\varepsilon>0$ найдется Δ, $0<\Delta\le\delta_0$, такое, что $\|\tilde{Y}_0-Y_0\|\le\Delta$ влечет $\|\tilde{Y}(t)-Y(t)\|\le\varepsilon\ \forall t\in[t_0,\infty)$. Решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и найдется Δ_0, $0<\Delta_0\le\Delta$, такое, что $\|\tilde{Y}_0-Y_0\|\le\Delta_0$ влечет $\tilde{Y}(t)-Y(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Метод Эйлера решения задачи (1)

$$Y_{i+1}=Y_i+hF(t_i,Y_i) \qquad (3)$$

всюду ниже рассматривается в следующем предположении: значение произвольно выбранной независимой переменной $t\in[t_0,\infty)$ остается для (3) фиксированным, при этом индекс i неограниченно возрастает с убывающим на $[t_0,t]$ равномерным шагом –

$$t_{i+1}=t,\quad h=\frac{t-t_0}{i+1},\quad t_k=t_0+kh,\ k=0,1,\dots,i+1. \qquad (4)$$

Изменение независимой переменной t понимается как изменение правой границы $[t_0,t]$.

Условия устойчивости в мультипликативной форме. Метод Эйлера рассматривается в виде

$$Y_{i+1}=Y_i+hF(t_i,Y_i)+hQ_i,\quad Q_i=(q_{1i},q_{2i},\dots,q_{ni}), \qquad (5)$$

где i, h из (4), q_{ki} – остаточный член формулы Тейлора для k-й компоненты приближения: $q_{ki}=\frac{1}{2}f'_k(\xi_{ki},Y(\xi_{ki}))h$, $t_i<\xi_{ki}<t_{i+1}$. Для возмущенного решения: $\tilde{Y}_{i+1}=\tilde{Y}_i+hF(t_i,\tilde{Y}_i)+h\tilde{Q}_i$, $\tilde{Q}_i=(\tilde{q}_{1i},\tilde{q}_{2i},\dots,\tilde{q}_{ni})$, $\tilde{q}_{ki}=\frac{1}{2}f'_k(\tilde{\xi}_{ki},\tilde{Y}(\tilde{\xi}_{ki}))h$, $t_i<\tilde{\xi}_{ki}<t_{i+1}$.

Предполагается, если не оговорено иное, что

$$[illegible]. \qquad (6)$$

Рассматриваются следующие преобразования возмущения:

$$[illegible],$$

или

$$[illegible], \quad w_{ki} = \tilde{q}_{ki} - q_{ki}, \qquad (7)$$

где

$$L_i^{(k)} = \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}}. \qquad (8)$$

С учетом (2) при ограничении (6) [illegible].

Из (7), (8) следует:

$$[illegible], \qquad (9)$$

где [illegible], h из (4), w_{ki} из (7), $k \in \overline{1,n}$. Имеет место

Лемма 1 [3, 4]. В рассматриваемых предположениях для всех решений и их возмущений из R_0 выполнено равенство [illegible].

Следствие 1. В тех же условиях на основании (9) верно равенство:

$$[illegible]. \qquad (10)$$

Теорема 1. В условиях леммы для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование $\Delta_1, 0 < \Delta_1 \le \delta_0$, такого, что для всех решений $Y = \tilde{Y}(t), Y(t_0) = \tilde{Y}_0$, при ограничении $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \le \Delta_1$ выполняется неравенство:

$$[illegible]. \qquad (11)$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_2 \le \Delta_1$, такое, что $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \le \Delta_2$ влечет:

$$[illegible]. \qquad (12)$$

Можно показать, что выполнение условий леммы 1 обеспечивает равномерную сходимость метода Эйлера на произвольном отрезке полуоси [7].

Разностная форма условий устойчивости. Из (10) следует:

$$\frac{\tilde y_k(t)-y_k(t)}{\tilde y_{k0}-y_{k0}} = \text{[illegible]}. \quad (13)$$

Из (13) и теоремы 1 вытекает

Следствие 2 [3]. При $\tilde y_{k0} \ne y_{k0}$ формулировка и утверждение теоремы 1 дословно сохраняются при замене соотношения (11) на соотношение вида

$$\left|\frac{\tilde y_k(t)-y_k(t)}{\tilde y_{k0}-y_{k0}}\right| \le C,\ C<\infty,\ t\in[t_0,\infty),\ k\in\overline{1,r}, \quad (14)$$

и (12) – на соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde y_k(t)-y_k(t)}{\tilde y_{k0}-y_{k0}}\right| = 0,\ k\in\overline{1,r}. \quad (15)$$

Следствие 3. Если система (1) имеет точку покоя, то в рассматриваемых условиях для ее устойчивости необходимо и достаточно существование $\Delta_1, 0<\Delta_1\le\delta_0$, такого, чтобы для всех решений $Y=\tilde Y(t), Y(t_0)=\tilde Y_0$, при ограничении $\left\|\tilde Y_0\right\| \le \Delta_1$ и $\tilde y_{k0}\ne 0$ выполнялось

$$\left|\frac{\tilde y_k(t)}{\tilde y_{k0}}\right| \le C,\ C<\infty,\ t\in[t_0,\infty),\ k\in\overline{1,r}, \quad (16)$$

точка покоя асимптотически устойчива, если выполнено предыдущее утверждение и кроме того существует $\Delta_2 \le \Delta_1$, такое, что неравенство $\left\|\tilde Y_0\right\| \le \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde y_k(t)}{\tilde y_{k0}}\right| = 0,\ \forall k\in\overline{1,r}. \quad (17)$$

Компьютерная проверка (14) – (17) совмещается с приближенным решением.

Условия устойчивости систем линейных ОДУ. Можно ограничиться случаем

$$\frac{dY}{dt}=A(t)Y,\ Y(t_0)=Y_0, \quad (18)$$

где матрица $A(t), n\times n,$ состоит из функций $a_{ij}=a_{ij}(t)$, которые определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы (в точке t_0 – справа) на полуоси $t\in[t_0,\infty),\ \forall i,j\in\overline{1,r}$.

Следствие 4. Следствие 3 дает необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости всей системы (18) [8].

Следствие 5. Для устойчивости системы (18) необходимо и достаточно выполнение (16) для какого-либо одного решения $\tilde Y$ инвариантного относительно выбора начального вектора $\tilde Y_0$, $\tilde y_{k0}\ne 0,\ \forall k\in\overline{1,r}$ [8].

В дальнейшем используется независимый от начального вектора способ [3, 4], приводимый ниже. Метод Эйлера для задачи (18) представляется в виде

$$Y_{i+1} = Y_i + hA(t_i)Y_i + h^2C(t_i), \qquad (19)$$

где $C(t_i) = (Q_1(t_i), Q_2(t_i), \dots, Q_n(t_i))$, при каждом j и каждом i элемент $h^2Q_j(t_i)$ является остаточным членом формулы Тейлора. Аналог (19) для возмущения обозначается $\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{Y}_i + hA(t_i)\tilde{Y}_i + h^2\tilde{C}(t_i)$. Рекуррентное преобразование влечет [4]:

$$\tilde{Y}_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i}(E + hA(t_\ell))\tilde{Y}_0 + \tilde{R}_i,$$

$\tilde{R}_i = \sum_{k=0}^{i}\prod_{\ell=0}^{i-k}(E + hA(t_{i-\ell}))\tilde{C}_k$, $\tilde{C}_i = h^2(\tilde{Q}_1(t_i), \tilde{Q}_2(t_i), \dots, \tilde{Q}_n(t_i))$, E – единичная матрица.

Лемма 2. В рассматриваемых условиях $\lim_{i\to\infty}\|\tilde{R}_i\| = 0 \ \forall t_0 < \infty$.

Следствие 6. В тех же условиях,

$$\tilde{Y}(\infty) = \lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(E + hA(t_\ell))\tilde{Y}_0.$$

Теорема 2. Система (18) устойчива тогда и только тогда, когда

$$\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(E + hA(t_\ell))\right\| \le C < \infty, \ \forall t_0. \qquad (20)$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (20) и соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\left\|\prod_{\ell=0}^{i}(E + hA(t_\ell))\right\| = 0. \qquad (21)$$

Эквивалентная запись соотношений (20), (21):

$$\left\|\lim_{h\to0}\prod_{\ell=0}^{i}(E + hA(t_\ell))\right\| < \infty, \quad \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to0}\left\|\prod_{\ell=0}^{i}(E + hA(t_\ell))\right\| = 0.$$

Следствие 7. Теорема 2 сохраняется, если матрица A постоянна, условия (20), (21) соответственно примут вид: $\left\|\lim_{i\to\infty}(E + hA)^i\right\| \le C < \infty$; $\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\left\|(E + hA)^i\right\| = 0$.

Степень матрицы $(E + hA)^i$ можно заменить на $(E + hA)^{2^\ell}$ [5]:

$$\left\|\lim_{\ell\to\infty}(E + hA)^{2^\ell}\right\| \le C < \infty; \quad \lim_{t\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\left\|(E + hA)^{2^\ell}\right\| = 0. \qquad (22)$$

Следствие 7 не включает ограничений на вид матрицы.

Эксперимент по оценке достоверности критериев устойчивости линейных систем в зависимости от шага разностного метода. При рассмотрении однородных линейных систем вида

$$\frac{dY}{dt}=AY,\ Y(t_0)=\bar{E}, \qquad (23)$$

с целью эксперимента рассматривалась матрица:

$$A=\begin{pmatrix} -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0.0109 \\ 1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & & 0.00098 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0098771 & & 1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0070770 & & 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.09 \end{pmatrix}.$$

Реализация критериев (22) для оценки устойчивости системы (23) в случае данной матрицы показывает асимптотическую устойчивость (что соответствует диагональному преобладанию) при изменении шага h в диапазоне $1\times10^{-14}\le h\le 1\times10^{-1}$. В частности, при $h=1\times10^{-14}$ получаются следующие значения нормы из (22) (нижняя строка таблицы, в верхней – номер итерации ℓ из (22)):

0	1	...	32	...	49	50	51	...	73	74
2.8284	2.8284	...	2.8284	...	23.769	27.084	10.992	...	0	0

При $h=1\times10^{-1}$ для той же задачи получаются следующие значения:

0	1	...	5	6	7	8	...	20	21	...	31
2.760	2.769	...	14.22	25.87	25.14	8.48	...	$4.355*10^{-1002}$	$1.69*10^{-2004}$	...	0

В случае матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ реализация (22) для системы (23) показывает неасимптотическую устойчивость, поскольку сохраняется ограниченность нормы величиной 1.4142 на большом интервале изменения t при изменении h в диапазоне $1\times10^{-14}\le h\le 1\times10^{-1}$. При $h=1\times10^{-14}$ получаются следующие значения нормы из (22):

0	1	...	60
1.4142	1.4142	...	1.4142

При $h=1\times10^{-6}$ получаются значения:

0	1	...	25	26	...	35	36	...	40	41
1.4142	1.4142	...	1.4143	1.4143	...	1.4742	1.5368	...	5.3494	20.235

При $h=1\times10^{-4}$ получится:

0	1	...	12	...	24	25	...	36	37

1.4142	1.4142	...	1.4143	...	1.7325	2.1225	...	$1.8571 \cdot 10^{361}$	$2.4387 \cdot 10^{722}$

Величина интервала, на котором сохраняется верная оценка, а также число возведений в степень ℓ сокращаются с ростом шага вследствие накопления погрешности.

Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ реализация (22) показывает неустойчивость на основании быстрого роста нормы, приводящего к переполнению в диапазоне $1.1\times10^{-14} \div 1.1\times10^{-4}$. Переполнение возникает быстрее при более грубом шаге. При $h=1.1\times10^{-14}$ для рассматриваемой матрицы получаются следующие значения нормы из (22):

0	1	...	39	40	...	59	60
2	2	...	2.0001	2.0003	...	17935	35871

При $h=1.1\times10^{-4}$ получится:

0	1	...	6	7	...	36	37
2	2	...	2.0001	2.0004	...	$2.8076 \cdot 10^{368}$	$7.3738 \cdot 10^{729}$

Собственные числа матрицы имеют нулевую вещественную часть, кратность элементарного делителя влечет неустойчивость, что подтверждает данный эксперимент.

Заключение. Изложены компьютерные методы анализа устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений систем ОДУ**.** Для линейной системы условия устойчивости инвариантны относительно начального вектора или от него не зависят. Для нелинейной системы необходимым и достаточным условием устойчивости является равномерная ограниченность на полуоси отношения возмущения к вызвавшему его возмущению начальных значений в варьируемой окрестности. Асимптотическая устойчивость имеет место при стремлении этого отношения к нулю с ростом независимой переменной. На этой основе реализуется численное моделирование устойчивости, которое выполняется по ходу разностного решения системы.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 480 с.

2. Катрич С. А. Разработка и исследование программного моделирования устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений на основе разностных методов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. Изд-во ТРТУ, Таганрог, 2006. – 20 с.

3. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20. – №12. – С. 105 – 118.
4. Ромм Я.Е. Мультипликативные критерии устойчивости на основе разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 1. – С. 127 – 142.
5. Ромм Я.Е. Параллельные итерационные схемы линейной алгебры с приложением к анализу устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 119 – 142.
6. Ромм Я.Е. Программируемые критерии устойчивости по Ляпунову. I / ТГПИ. – Таганрог, 24 с. ДЕП в ВИНИТИ 21.06.2005, № 879- В2005.
7. Ромм Я.Е. Программируемые критерии устойчивости по Ляпунову. II / ТГПИ. – Таганрог, 26 с. ДЕП в ВИНИТИ 21.06.2005, № 880- В2005.
8. Ромм Я.Е., Заярный В.В. Численный эксперимент по выбору параметров компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений / ТГПИ. – Таганрог, 2015. – 44 с. Деп. В ВИНИТИ 10.02.2015, № 27-2015.
9. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 478 с.

Рецензенты:

Боженюк А.В., д.т.н., профессор кафедры информационно аналитических систем безопасности, Инженерно-технологическая академия Южного федерального университета, г. Таганрог;

Карелин В.П., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий Таганрогского института управления и экономики, г. Таганрог.