

ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И КОНЦЕНТРАЦИИ ВОЗДУШНЫХ ПУЗЫРЬКОВ В КАРУСЕЛЬНОМ АЭРОТЕНКЕ

Бузало Н.С.¹, Ермаченко П.А.¹, Проценко Е.А.², Хачунц Д.С.³, Чистяков А.Е.³

¹ГОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова», Таганрог, Россия (346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132), e-mail: buzalo.n.s@mail.ru, neo-ecology@mail.ru

²ГОУ ВО «Инженерно-технологическая академия Южного федерального университета», Таганрог, Россия (347928, г. Таганрог, ГСП 284, ул. Чехова, 2), e-mail: eapros@rambler.ru

³ГОУ ВО «Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева Южного федерального университета», Таганрог, Россия (347928, г. Таганрог, ГСП 284, ул. Чехова, 2), e-mail: diana-hachunts@mail.ru, cheese_05@mail.ru

Для задач математического моделирования гидродинамических процессов и транспорта воздушных пузырьков в водоемах актуальной остается проблема построения и практического использования вычислительно-эффективных методов, применение которых позволяло бы получать достаточно точное приближенное численное решение. Цель работы заключается в построении трехмерной модели транспорта кислорода в биологических очистных сооружениях, позволяющей предсказывать динамику изменения концентрации кислорода за счет движения воды, всплытия и диффузионных процессов. Для решения поставленной задачи требуется выполнить дискретизацию моделей гидродинамики и транспорта веществ, произвести аналитические исследования погрешности аппроксимации, устойчивости и консервативности предложенных схем и разработать комплекс программ, предназначенный для моделирования движения водной среды, транспорта кислорода. Математическое моделирование природных систем дополняет, а во многих случаях позволяет исключить дорогостоящие натурные эксперименты с реальной экосистемой. Важной задачей, возникающей при изучении поведения субстанций в биологических очистных сооружениях, является разработка модели оптимального управления. В качестве алгоритмов их реализации используют методы, основанные на использовании сопряженных уравнений.

Ключевые слова: аэротенк, гидродинамика, транспорт кислорода, численные эксперименты.

THREE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF FLUID DYNAMICS AND CONCENTRATION OF AIR BUBBLES IN THE CAROUSEL AIRTENK

Buzalo N.S.¹, Ermachenko P.A.¹, Protsenko E.A.², Khachunts D.S.³, Chistyakov A.E.³

¹GOU VO South-Russian State Technical University (NPI) of the M.I. Platov, Novochoerkassk, Russia (347928, Novochoerkassk, Prosvescheniya ul, 132), e-mail: buzalo.n.s@mail.ru, neo-ecology@mail.ru

²GOU VO «Engineering and Technological Academy of the Southern Federal University», Taganrog, Russia (347928, Taganrog, GSP 284, st. of Chekhov, 2), e-mail: eapros@rambler.ru

³GOU VO Public Educational Institution «Scientific Research Institute of Multiprocessor Computer Systems named after Acad. A.V. Kalyaev of Southern Federal University», Taganrog, Russia (347928, Taganrog, GSP 284, st. of Chekhov, 2), e-mail: diana-hachunts@mail.ru, cheese_05@mail.ru

For the purposes of mathematical modeling of hydrodynamic processes and transport of air bubbles in the water bodies to date remains the problem of construction and practical use of computationally efficient methods, the use of which would offer a sufficiently accurate approximate numerical solution. The purpose of work is to construct a three-dimensional model of transport of oxygen in biological sewage treatment plants, allowing to predict the dynamics of change in the concentration of oxygen due to the movement of water, surfacing and diffusion processes. To solve the problem you want to sampling models of hydrodynamics and transport of substances, produce analyzes of approximation error, stability and conservatism of the proposed schemes, and develop a program designed to simulate the movement of water environment, transport oxygen. Mathematical modeling of natural systems complement, and in many cases eliminates costly field experiments with a real ecosystem. An important problem arising in the study of the behavior of substances in biological wastewater treatment plants is the development of models of optimal control. As the algorithm implementation using methods based on the use of adjoint equations.

Keywords: airatenk, hydrodynamics, oxygen transport, numerical experiments.

Постановка задачи

Исходными уравнениями гидродинамики являются:

– уравнения Навье-Стокса для концентрационной конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F, \quad x \in \Omega_x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad x \in \Omega_x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \beta g (S - S^0) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$x \in \Omega_x, \quad z \in (-h, \zeta), \quad 0 \leq t \leq T,$$

- уравнение неразрывности

$$\rho'_t + \text{div}(\rho V) = 0, \quad x \in \Omega_x, \quad z \in (-h, \zeta), \quad 0 \leq t \leq T,$$

- уравнения сохранения массы воздуха

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + (w + w_{air}) \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) + W,$$

$$x \in \Omega_x, \quad z \in (-h, \zeta), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $x = (x, y)$ - горизонтальные координаты; z - вертикальная координата; t - время; $\bar{\Omega}_x = \Omega_x \cup \partial\Omega_x$ - расчетная область в плоскости Oxy , $\partial\Omega_x$ - граница расчетной области в плоскости Oxy ; $\zeta = \zeta(x, y, t)$ - уровень свободной поверхности; T - конечный момент времени; $V = \{u, v, w\}$ - вектор скорости течения; K_x, K_y, K_z - коэффициенты турбулентного обмена; $P = p + \rho g \zeta$ - полное гидродинамическое давление с учетом глубины, ρ - плотность; S - концентрация нерастворенного воздуха в виде мелкодисперсных пузырьков; S^0 - среднее значение концентрации воздуха; β - коэффициент линейной зависимости плотности среды от концентрации воздуха; g - ускорение свободного падения; F_x - горизонтальная компонента внешней силы \bar{F} , w_{air} - скорость всплытия пузырьков.

Источником движения является аэратор Σ_{air} . Аэратор (рис. 1) находится в плоскости Oxz . Известен расход воздуха $Q_{air}(t)$ [м³/с], и скорость движения среды задается: $u = 0$, $v = 0$, $w = Q_{air}(t) / S_{air}$, $(x, y, z) \in \Sigma_{air}$, $0 \leq t \leq T$, где $Q_{air}(t)$ - интенсивность расхода воздуха, S_{air} - площадь аэратора. Величина потока вещества к нормали поверхности Σ_{air} , на единицу

площади аэратора она равна $Q_{air}(t) \rho_{air} / S_{air}$. Граничное условие для расчета концентрации

пузырьков: $K_z \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{Q_{air}(t)}{S_{air}} \rho_{air}$, $(x, y, z) \in \Sigma_{air}$, $0 \leq t \leq T$, где ρ_{air} - плотность воздуха.

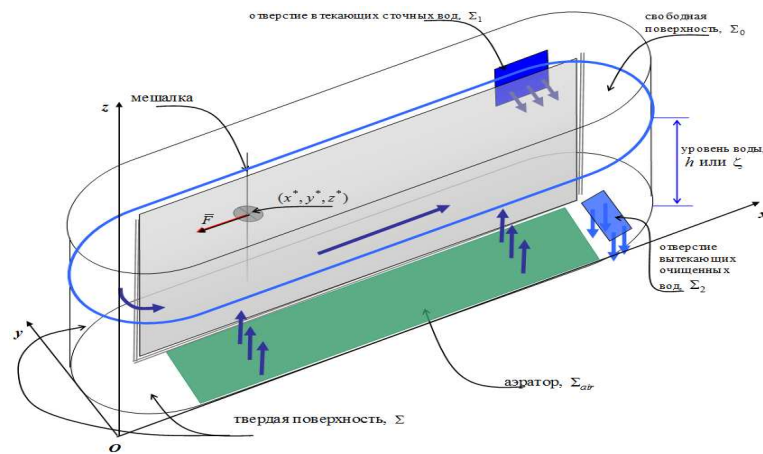


Рис. 1. Схема расчетной области

Отверстие втекания сточных вод Σ_1 расположено в стенке параллельной плоскости Oxz . На данной границе задан расход втекающих вод $Q_1(t)$, и граничные условия для расчета поля скорости запишутся: $u = 0$, $v = 0$, $w = Q_1(t) / S$, $(x, y, z) \in \Sigma_1$, $0 \leq t \leq T$. Так как пузырьки воздуха не содержатся в сточных водах, то $S = 0$, $(x, y, z) \in \Sigma_1$, $0 \leq t \leq T$. На твердой поверхности Σ задаются условия прилипания $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $(x, y, z) \in \Sigma$, $0 \leq t \leq T$ и

условие не протекания $\frac{\partial S}{\partial n} = 0$, где n – нормаль. Для вязкой жидкости вопросы правильной

постановки граничных условий на участке вытекания Σ_2 остаются открытыми. Один из способов задания граничных условий – использование априорных предположений о характере движения жидкости и геометрии рассматриваемой области: $u = 0$, $v = 0$, $P = P_{atm} + \rho g \zeta$, $(x, y, z) \in \Sigma_2$, $0 \leq t \leq T$. Задается сток вещества для расчета концентрации

воздуха: $K_z \frac{\partial S}{\partial z} = (w + w_{air}) S$. На свободной поверхности Ω_x используется динамическое

условие: $P = P_{atm}$, $x \in \Omega_x$, $z = \zeta$, $0 \leq t \leq T$ и преобразованное уравнение сохранения массы

с учетом кинематического условия на свободной поверхности: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w$, $x \in \Omega_x$,

$z = \zeta$, $0 \leq t \leq T$. Пузырьки воздуха исчезают (аннигилируются), достигнув границы с атмосферой $S = 0$, $x \in \Omega_x$, $z = \zeta$, $0 \leq t \leq T$.

Дискретная математическая модель

Расчетная область вписана в параллелепипед. Для программной реализации трехмерной математической модели гидродинамики вводится равномерная сетка:

$$\bar{w}_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, \sigma_k = kh_\sigma; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y}, k = \overline{0..N_\sigma};$$

$$N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_\sigma h_\sigma = 1\},$$

где n, i, j, k – индексы по временной и пространственным переменным $Ox, Oy, O\sigma$ соответственно, τ, h_x, h_y, h_σ – шаги по временной и пространственным переменным $Ox, Oy, O\sigma$ соответственно, l_x, l_y, l_σ – длина расчетной области по временной и пространственным переменным Ox, Oy соответственно, N_t, N_x, N_y, N_σ – количество узлов по временной и пространственным переменным $Ox, Oy, O\sigma$ соответственно.

Для решения задачи гидродинамики использовался метод поправки к давлению [1].

Вариант данного метода в случае переменной плотности примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z &= (K_x \tilde{u}'_x)'_x + (K_y \tilde{u}'_y)'_y + (K_z \tilde{u}'_z)'_z + F_x, \\ \frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z &= (K_x \tilde{v}'_x)'_x + (K_y \tilde{v}'_y)'_y + (K_z \tilde{v}'_z)'_z, \\ \frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z &= (K_x \tilde{w}'_x)'_x + (K_y \tilde{w}'_y)'_y + (K_z \tilde{w}'_z)'_z + \beta g (S - S^0), \\ p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} &= \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau}, \\ \frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} &= -\frac{1}{\rho} \hat{p}'_x, \quad \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \hat{p}'_y, \quad \frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \hat{p}'_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где $V = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора скорости, $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}, \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ – компоненты полей вектора скорости на «новом» и промежуточном временных слоях соответственно, $\bar{u} = (\tilde{u} + u)/2$, $\hat{\rho}$ и ρ – распределение плотности водной среды на новом и предыдущем временных слоях соответственно.

При решении поставленной задачи использована декартова система координат в горизонтальной плоскости и σ – координатная система в вертикальном направлении [2; 3;

12]: $\sigma = \frac{z - \zeta}{h + \zeta}$, $x_\sigma = x$, $y_\sigma = y$, $t_\sigma = t$, здесь $\sigma = a = 0$ на свободной поверхности, $\sigma = b = -1$

на дне; $H = h + \zeta$ – общая глубина до свободной поверхности, $h = h(x, y)$ – глубина водного объекта, $\zeta = \zeta(t, x, y)$ – возвышение свободной поверхности относительно уровня невозмущенной жидкости.

Для описания транспорта пузырьков использовано уравнение диффузии-конвекции, которое в σ -координатной системе запишется следующем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{a-b}{H} (w + w_{air}) \frac{\partial S}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \left(\frac{a-b}{H} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right) + W.$$

Для решения поставленной задачи транспорта веществ использованы схемы расщепления на одномерную и двумерную задачи, при этом первая подзадача представлена одномерным уравнением диффузии-конвекции-реакции относительно расчетного временного слоя. Шаблон, который будет использоваться при решении данного уравнения на первом полушаге, приведен на рис. 2. Относительно расчетного временного слоя данный шаблон является трехточечным.

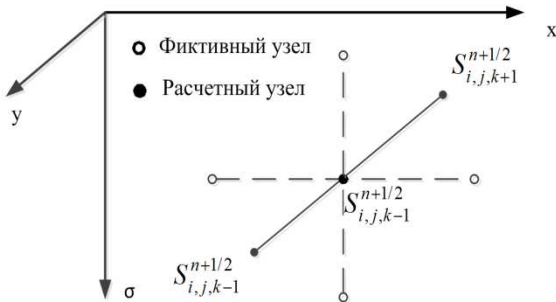


Рис. 2. Шаблон, который используется для первой подзадачи

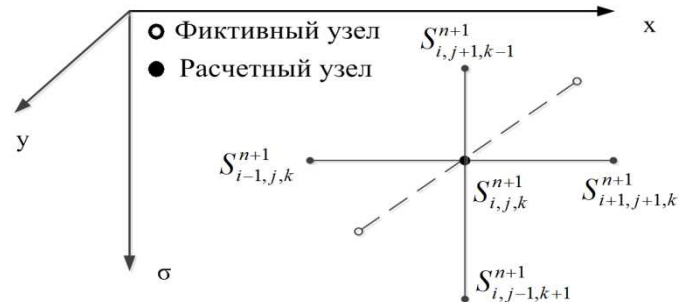


Рис. 3. Шаблон, который используется для второй подзадачи

Шаблон, который будет использоваться при решении данного уравнения на втором полушаге, приведен на рис. 3. Для аппроксимации задачи по пространственным переменным вводятся коэффициенты $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, описывающие «заполненность» областей, находящихся в окрестности ячейки (контрольных областей). В случае граничных условий третьего рода $c'_n(x, y, z, t) = \alpha_n c + \beta_n$, где n – вектор нормали, направленный внутрь области, дискретные аналоги операторов конвективного uc'_x и диффузионного $(\mu c'_x)'_x$ переноса, полученные при помощи интегро-интерполяционного метода [5], учитывающие частичную «заполненность» ячеек, могут быть записаны в следующем виде [9]:

$$(q_0)_i uc'_x \square (q_1)_i u_{i+1/2} \frac{c_{i+1} - c_i}{2h_x} + (q_2)_i u_{i-1/2} \frac{c_i - c_{i-1}}{2h_x}, \quad (2)$$

$$(q_1)_i (\mu c'_x)'_x \square (q_1)_i \mu_{i+1/2} \frac{c_{i+1} - c_i}{h_x^2} - (q_2)_i \mu_{i-1/2} \frac{c_i - c_{i-1}}{h_x^2} - \left| (q_1)_i - (q_2)_i \right| \mu_i \frac{\alpha_x c_i + \beta_x}{h_x}.$$

Погрешность аппроксимации математической модели равна $O(\tau + \|h\|^2)$, где $\|h\| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$. Доказано сохранение потока на дискретном уровне разработанной гидродинамической модели, а также отсутствие неконсервативных диссипативных слагаемых [10], полученных в результате дискретизации системы уравнений. Достаточное условие устойчивости и монотонности разработанной модели определяется на основе принципа максимума [5] при ограничениях на шаг по пространственным координатам:

$h_x < |2\mu/u|$, $h_y < |2\mu/v|$, $h_z < |2\nu/w|$ или $Re \leq 2N$, где $Re = |V| \cdot l / \mu$ – числа Рейнольдса, l – характерный размер области, $N = \max\{N_x, N_y, N_z\}$. Дискретные аналоги системы уравнений решаются адаптивным модифицированным попеременно-треугольным методом вариационного типа [4; 6].

Численные эксперименты по моделированию транспорта кислорода в аэротанке

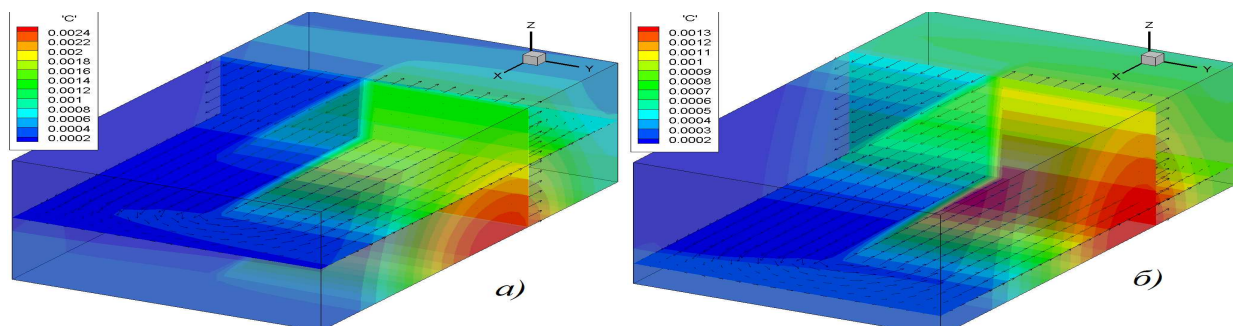
Разработано программное обеспечение, предназначенное для численной реализации прогностических моделей транспорта кислорода в биологических очистных сооружениях. Производились численные эксперименты по моделированию распространения кислорода.

Исходными данными модели являются: скорость всплытия пузырьков $w_{air} = 4,76 \cdot \sqrt{\sigma / (\rho \cdot d_{пуз})}$; диаметр пузырьков $d_{пуз} = \sqrt[3]{6 \cdot \sigma \cdot d_0 / (g \cdot \rho \cdot (1 - \rho_{возд} / \rho))}$; $\rho_{air} = 1,2$ кг/м³; $\rho = 1000$ кг/м³; $\sigma = 0728$ Н/м. Параметры расчетной области: длина 120 м, ширина 9 м, глубина 6 м. Результаты численных экспериментов приведены на рис 4. Расчетный интервал составлял: а) 15 мин, б) 30 мин, в) 45 мин, г) 1 час. Для верификации разработанного программного комплекса был проведен численный эксперимент по моделированию транспорта взвеси в водоеме с однонаправленным течением [7; 8].

При этом в инженерных расчетах зависимости ширины зоны смешения от расстояния до створа вычисляют по эмпирической формуле [11]:

$$F = \frac{B_1 - B_2}{2L}, \quad B_2 = B_1 + 2tg13^\circ L. \quad (3)$$

На рис. 5 приведены зависимости ширины зоны смешения B , м от расстояния до створа L , м (влияние конвективного переноса), рассчитанные на основе разработанного программного комплекса (на рисунке показаны кружками) и на основе формулы (3) (показаны линией).



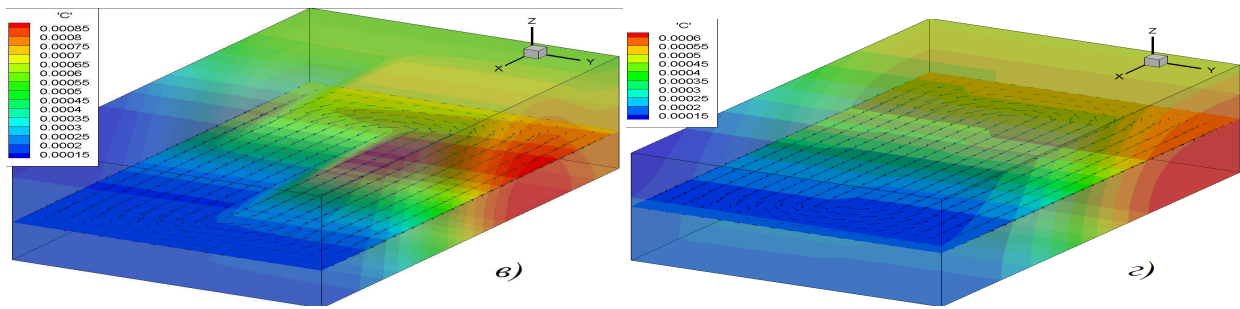


Рис. 4. Динамика изменения концентрации кислорода

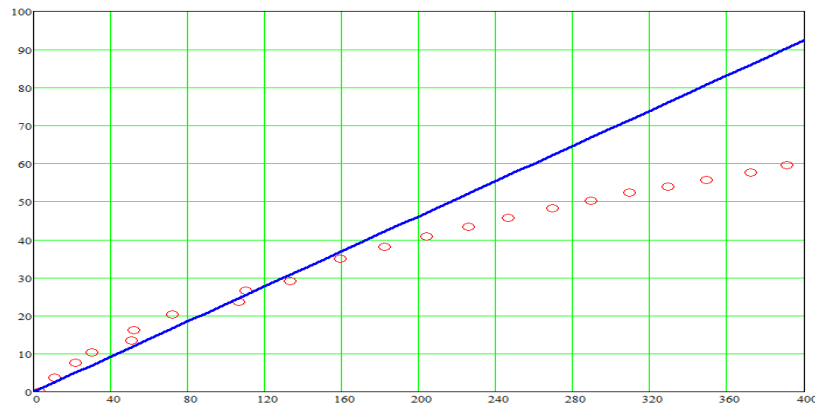


Рис. 5. Зависимости ширины зоны смешения от расстояния до створа

Из результатов расчетов видно, что в случае расстояния до створа 150 м и менее можно принять гипотезу о том, что интенсивность диффузионного перемешивания зависит линейно от интенсивности конвективного переноса и составляет $\sim 23,1\%$ ($\text{tg}13^\circ$). При больших расстояниях преобладание конвективного переноса над диффузионными процессами усиливается.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Задания № 2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, а также при частичной финансовой поддержке РФФИ по проектам № 15-01-08619, 15-07-08626 и 15-07-08408.

Список литературы

1. Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. - 15:1. - С. 197–207.
2. Дегтярева Е.Е., Проценко Е.А., Чистяков А.Е. Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях // Инженерный вестник Дона. - 2012. - Т. 23. - № 4-2. - С. 30.

3. Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е. Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. - № 2 (127). – С. 112-118.
4. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. - 43:3. - С. 552-572.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М., Наука, 1989.
6. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. - 2012. - Т. 24. - № 1. - С. 3-20.
7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. - 2013. - Т. 25. - № 12. - С. 65-82.
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. - 2014. - Т. 15. - № 4. - С. 610-620.
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия Южного федерального университета. Технические науки. - 2013. - № 4. - С. 87-98.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишня А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Математическое моделирование. - 2013. - Т. 25. - № 11. - С. 53-64.
11. Типовая технологическая схема добычи песка, гравия и песчано-гравийной смеси судоходных рек и других водоемов. - М. : Транспорт, 1980.
12. Ezer T., Mellor G.L. Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model // Dynamics of Atmospheres and Oceans. - 2000. - Vol. 32. - С. 155-208.

Рецензенты:

Сухинов А.И., д.ф.-м.н., профессор, декан факультета физики, математики и информатики, ТГПИ им. А.П. Чехова (филиал) РИНХ, г. Таганрог;

Илюхин А.А., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математики, ТГПИ им. А.П. Чехова (филиал) РИНХ, г. Таганрог.