

## АНАЛИЗ ПОСТКРИТИЧЕСКИХ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НАГРУЖЕНИЯ

Терентьев А.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский Государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия (190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3), e-mail: pptalex@mail.ru

Проводится аналитический и численный анализ статического поведения стержня трубчатого поперечного сечения, потерявшего устойчивость. Переменное вдоль длины стержня поперечное сечение имеет постоянный внутренний и переменный внешний диаметры. При помощи варьирования функционала энергии получено нелинейное дифференциальное уравнение, определяющее равновесное положение стержня для случаев нагружения его сжимающей силой и изгибающими моментами. Рассмотрены случаи статического изгиба с большой амплитудой, вызванные действием осевой сжимающей силы и заданными изгибными деформациями в определенных поперечных сечениях. Для определения статического положения стержня используется метод локальных вариаций. Получены формы равновесия стержня при значительных изгибных деформациях. Произведено сравнение точного аналитического решения с численным решением для симметричной формы равновесия стержня. Выявлено хорошее соответствие между аналитическими и численными решениями, подтверждающее правильность использования алгоритма.

Ключевые слова: переменное поперечное сечение, метод локальных вариаций, сжимающая посткритическая сила, изгибные деформации.

## THE ANALYSIS OF POSTCRITICAL BENDING DEFORMATIONS OF VARIABLE CROSS-SECTION BEAM UNDER DIFFERENT LOADING CONDITIONS

Terentev A.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>«Saint-Petersburg State Marine Technical University», Saint-Petersburg, Russia (190121, Saint-Petersburg, Lotsmanskaya street, 3), e-mail: pptalex@mail.ru

Analytical and numerical analysis of static behavior of tubular cross-section buckled beam is performed. Variable along beam's length cross-section has constant internal and variable outer diameter. Nonlinear differential equation describing equilibrium position is derived under functional variation for beam loading with both axial force and bending moments. Large amplitude cases of static bending are considered caused by axial force and prescribed bending deformations in certain cross-sections. The method of local variations is used to define static equilibrium. Forms of equilibrium with sufficient bending deformations are obtained. Exact analytical solution is compared with numerical solution for symmetric equilibrium beam form. Satisfactory coincidence between analytical and numerical solutions is revealed confirming correct algorithm usage.

Keywords: variable cross-section, local variation method, compressive postcritical force, bending deformations.

### Постановка задачи

Цель данной работы заключалась в проведении анализа посткритического поведения сильно деформированного стержня [5]. Рассмотрен стержень трубчатого поперечного сечения, имеющий переменный осевой момент инерции:

$$I(s) = \frac{\pi d^4 (\alpha^4(s) - 1)}{64}, \quad (1)$$

где  $\alpha(s) = \frac{D(s)}{d}$ ,  $D(s)$  — внешний переменный диаметр по длине стержня,  $d = Const$  — внутренний диаметр поперечного сечения. Единственное ограничение, накладываемое на функцию  $\alpha(s)$ , следует из физического смысла задачи:

$$\alpha(s) \geq 1.0 \quad (2)$$

Далее выбираем функцию  $\alpha(s)$  в следующем виде:

$$\alpha_*(s) = \frac{\pi d^4}{64} \left[ a \cos\left(\frac{2\pi s}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + b \right], \quad (3)$$

где  $c$  — некоторые константы.

Задание функции в виде (3) обеспечивает довольно гладкую симметричную зависимость момента инерции от осевой координаты. Например, если  $a = 0.2, b = 0.9$ , то толщина стержня стремится к нулю по ее концам. Внешний диаметр посередине стержня превышает на 10% внутренний диаметр, который постоянен по его длине.

Положение равновесия стержня определяется углом  $\varphi(s)$ , определяемым между горизонталью и касательной к изогнутой оси стержня (см. рис. 1 для случая сжатия осевой силой), выбранном в виде неизвестной функции. Данный угол является функцией материальной координаты  $s$ .

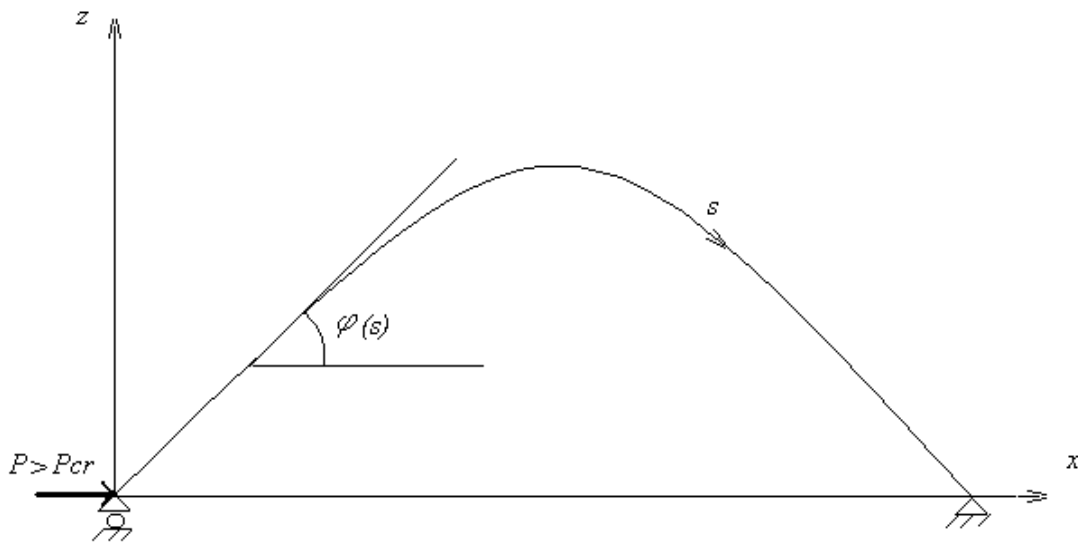


Рис. 1. Сильно изогнутый стержень под действием сжимающей силы

Для того чтобы получить уравнения, определяющие статическое равновесие стержня, подвергнем минимизации следующий функционал потенциальной энергии [2]:

$$J = \int_0^1 \left[ \frac{\pi \bar{d}^2}{2} \varphi_0^2 \left[ \frac{\alpha^4 - 1}{64} - \frac{k \bar{d}^2 \varphi_0^2 (\alpha^6 - 1)}{512} \right] + \beta_0 \cos \varphi_0 + \sum_i M_i \varphi_{0i} \delta(\bar{s} - \bar{s}_i) \right] d\bar{s} \quad (4)$$

Условие стационарности данного функционала определяет устойчивое положение равновесия стержня. Первое слагаемое в квадратных скобках представляет вклад линейной компоненты в потенциальную энергию, второе относится к нелинейной компоненте. Постановка задачи (4) учитывает нагружение и сжимающей силой, и изгибающими моментами. Данное выражение записано в безразмерной (разделено на множитель  $Eld^2$ ). В

(4):  $\bar{s} = \frac{s}{l}$  — безразмерная осевая координата,  $\beta_0$  — значение безразмерной статической осевой сжимающей силы,  $\bar{d} = \frac{d}{l}$  — отношение внутреннего диаметра к длине стержня,  $\delta(s - s_i)$  — символ Кронекера и  $M_i$  — изгибающий момент в точке  $s = s_i$ .

Вариация функционала энергии (4) относительно неизвестной функции  $\varphi_0(s)$  приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\beta_0 \sin \varphi_0 + \frac{\pi \bar{d}^2}{64} [\varphi_0' (\alpha^4 - 1)] - \frac{k \pi \bar{d}^4}{64} [\varphi_0^3 (\alpha^6 - 1)] + 2 \sum_i M_i \delta_i (s - s_i) = 0 \quad (5)$$

Рассмотрим шарнирно-опертый стержень, при этом данное дифференциальное уравнение следует решать с кинематическим условием:

$$\int_0^1 \sin \varphi_0(s) ds = 0, \quad (6)$$

которое означает, что боковое перемещение стержня  $w_0(s)$  равно нулю на правом конце.

### Решение для симметричной конфигурации стержня

Аналитического решения данной задачи для произвольной функции  $\alpha(s)$  не существует, так что необходимо применить какой-то численный алгоритм. Используется алгоритм метода локальных вариаций [1], который ограничивается симметричной конфигурацией трубки, так что распределение изгибающих моментов должно быть симметрично при  $s > \frac{l}{2}$ .

При  $\alpha(s) = \text{Const}$  задача имеет хорошо известное аналитическое решение для случая нагружения осевой сжимающей силой. Элементарный линейный анализ устойчивости дает величину статической силы потери устойчивости  $\beta_{cr} = \frac{\pi^3 \bar{d}^2 (\alpha^4 - 1)}{64}$ , а нелинейный анализ закритического поведения для  $\beta_0 > \beta_{cr}$  определяет положение трубки в виде элаستيци Эйлера [3]. Данный случай служит обычной задачей для проверки численного алгоритма.

В случае задания распределенных моментов вводим их осевыми деформациями  $\varepsilon_i(s)$ , заданными на верхнем фибре трубки (т.е. на расстоянии  $z = \frac{D}{2}$  от нейтральной оси) при заданном поперечном сечении [4]. Деформации на расстоянии  $z = -\frac{D}{2}$  от нейтральной оси должны быть такими же по величине и иметь противоположный знак. Изгибающий момент,

действующий в данном поперечном сечении, определяется формулой  $M = \frac{\varepsilon E \pi d^4 (\alpha^4 - 1)}{32D}$  (в размерном виде).

Метод локальных вариаций позволяет определить изгибающие моменты  $M_i$ , действующие в данном поперечном сечении стержня, в виде:

$$M_i = \frac{\pi \bar{d}}{32} \cdot \begin{cases} \left( \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha} \varepsilon \right)_i, & i = 1 \\ \left( \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha} \varepsilon \right)_i - \left( \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha} \varepsilon \right)_{i-1}, & i \neq 1 \end{cases} \quad (7)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N / 2$ .

Если деформация задана только в точке  $s = s_i$ , то сосредоточенный изгибающий момент вычисляется только в точке  $i = 1$ .

Для проверки численной процедуры произведено сравнение найденной формы стержня с имеющимися аналитическими результатами. Данный тест относится к равномерному распределению функции  $\alpha(s)$  вдоль оси стержня. Параметры численной процедуры выбраны следующими:  $N=16..1024$  — число интервалов по оси стержня,  $h = 2^{-3} \dots 2^{-20}$  — шаг варьирования. Величина статической осевой силы  $\beta_{st} = 1.1 \beta_{cr}$ . Если функция  $\varphi(s)$  определяется по алгоритму метода локальных вариаций [1], то боковое перемещение  $w(s)$  и соответствующее горизонтальное перемещение  $x(s)$  находятся в виде:

$$\begin{aligned} w(s) &= \int_0^s \sin \varphi(s) ds, \\ x(s) &= \int_0^s \cos \varphi(s) ds \end{aligned} \quad (8)$$

На рисунке 2 представлены две формы равновесного положения стержня (точное решение и решение, полученное по методу локальных вариаций). Хорошее соответствие между двумя кривыми на рисунке 2 доказывает, что принятая численная процедура может быть использована для определения закритического статического положения стержня после потери устойчивости.

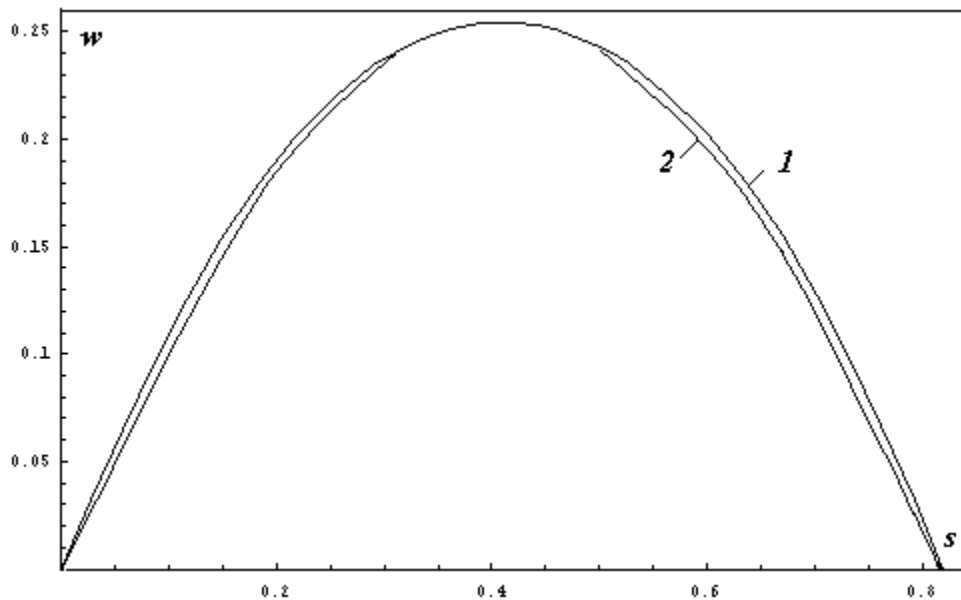


Рис. 2. (при  $\alpha(s) = 1.5, \bar{d} = 0.2, \beta_{st} = 1.1\beta_{cr}$ ) кривая 1 представляет закритическое положение стержня, соответствующее эластике Эйлера, найденной в форме эллиптических интегралов (точное решение), а кривая 2 определяет форму равновесия, полученную с помощью алгоритма метода локальных вариаций

На рисунке 3 показано положение равновесия, которое определяется двумя симметрично расположенными ( $s_M = 0.25, s_M = 0.75$ ) сосредоточенными моментами ( $\epsilon = 0.1$ ). Изгиб существует только между точками, где приложены моменты, внешние части стержня остаются прямыми.

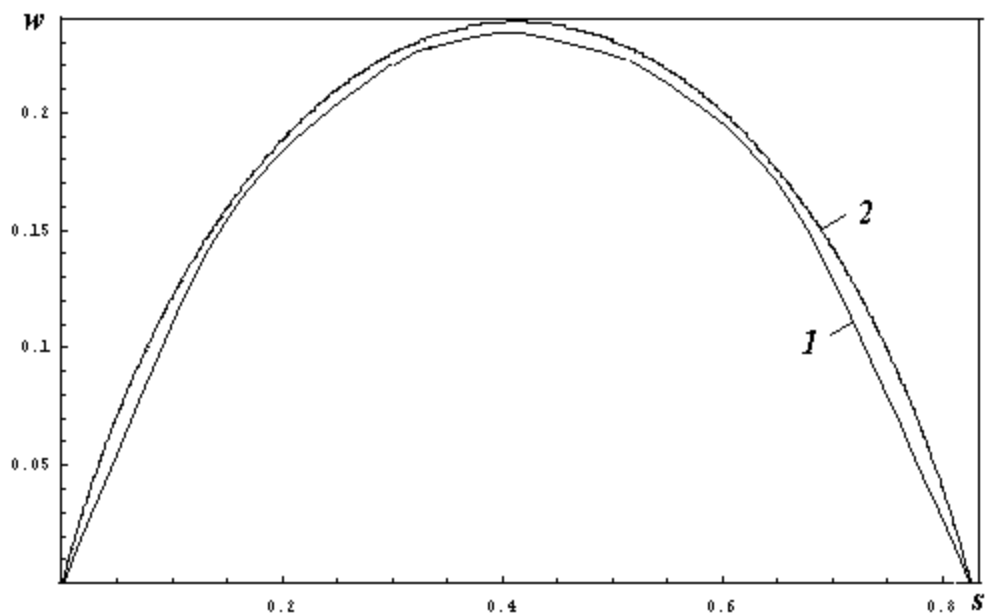


Рис. 3. (при  $\alpha(s) = 1.5, \bar{d} = 0.2, \beta_{st} = 1.1\beta_{cr}$ ) кривая 1 представляет точное решение, а кривая 2 определяет численное решение

Алгоритм решения нелинейной задачи статического изгиба определяет то, что положение равновесия должно быть симметричным.

## **Выводы**

Произведен статический анализ шарнирно-опертого стержня. Для того чтобы получить решение, определяющее статическое положение стержня, был использован метод локальных вариаций. Сопоставление численного и аналитического решений позволило подтвердить правильность используемого алгоритма.

Рассмотренная система представляет некоторые особенности механических систем, используемых в практических приложениях, а именно в химической и нефтегазовой промышленности.

## **Список литературы**

1. Баничук Н.В., Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука. 1973. — 240 с.
2. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 392с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
4. Lagoudas D.C., Tadjbaksh I.G. Active flexible rods with embedded SMA fibers// Smart Materials and Structures . – 1992. Vol.1 – p. 162–167
5. Yalcintas M., Coulter J.P., Don D.P. Structural modeling and optimal control of electroreological material based adaptive beams// Smart Materials and Structures. – 1995. p. 207–214

## **Рецензенты:**

Картузов Е.И., д.т.н., профессор кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского Государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург;  
Сорокин С.В., д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов Санкт-Петербургского Государственного морского технического университета, г. Санкт-Петербург.