

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКТИВНОГО РАБОЧЕГО ОРГАНА КУЛЬТИВАТОРА СО СТОЙКОЙ В ВИДЕ ГИБКОГО ТРУБЧАТОГО ЭЛЕМЕНТА

Устинов Н.Н.<sup>1</sup>, Маратканов А.А.<sup>1</sup>, Смолин Н.И.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Государственный аграрный университет Северного Зауралья», Тюмень, Россия (625003, Тюмень, ул. Республики, 7), e-mail:UstinovNikNik@mail.ru

В работе представлена математическая модель активного рабочего органа культиватора со стойкой в виде гибкого трубчатого элемента. Стойка представляет собой герметичную С-образную полую трубку некруглого поперечного сечения. При подаче пульсирующего давления в полость стойки рыхлительная лапа совершает колебательные движения с определенной амплитудой и частотой, которые зависят от параметров подаваемого давления. Изменяя параметры давления, можно задать различные режимы колебаний рабочего органа, что позволит снизить тяговое сопротивление при обработке почвы. При построении математической модели гибкий трубчатый элемент рассматривается как стержень. В качестве силовых факторов, действующих на рабочий орган, при расчете учитываются сила сопротивления почвы и изгибающий момент, возникающий при подаче внутреннего давления. Уравнение движения стержня получены из уравнения равновесия Новожилова с помощью принципа Даламбера. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений движения лапы с учётом действующих силовых факторов. Результаты работы могут быть использованы при расчете и проектировании рабочих органов почвообрабатывающих машин.

Ключевые слова: культиватор, активный рабочий орган, гибкий трубчатый элемент, математическая модель.

## MATHEMATICAL MODEL OF ACTIVE TOOL OF CULTIVATOR WITH THE STANDARD OF A FLEXIBLE TUBULAR ELEMENT

Ustinov N.N.<sup>1</sup>, Maratkanov A.A.<sup>1</sup>, Smolin N.I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Federal Stat Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education Norten-Ural State Agricultural University (FSBEI HPE «Norten Trans-Ural SAU»), Tyumen, Russia (625003, Tyumen, Republic Street, 7), e-mail:UstinovNikNik@mail.ru

In the article there is presented mathematical model of active tool of cultivator with the standard of a flexible tubular element. Standard represents C - shape hermetic hollow tube out of round cross section. Under impact pressure in the standard cavity, the cultivator point makes forced vibrations with definite amplitude and frequency, which depend on pressure characteristic. Changing pressure characteristic, we can specify different vibration modes of tool that can reduce drawbar resistance under tillage. While making mathematical model flexible tubular element is regarded as a bar. Under calculation in the capacity of force factors affecting on tool, it takes into consideration the resistance force of soil and bending moment under internal pressure. Equation of motion of bar is derived from Novozhilov equilibrium equation with the help of d'Alambert's principle. There is represented the system of ordinary differential equations of cultivator point motion subject to acting force factors. Working data can be used in calculation and designing of tool of tillage machines.

Keywords: cultivator, activetool, flexible tubular element, mathematical models.

В настоящее время значительное внимание уделяется проблеме применения вибрации при обработке почвы, являющейся наиболее энергоемкой операцией сельскохозяйственного производства. Внимание вызвано главным образом тем, что использование конструкций с колеблющимися рабочими органами позволяет снизить тяговое сопротивление. Вместе с тем, применение конструкций способных обеспечить оптимальный режим колебаний упругого рабочего органа на разных по физико-механическим свойствам почвах является достаточно актуальной проблемой.

Для решения данной проблемы предложена конструкция рабочего органа культиватора [2, 5] С-образная стойка которого выполнена в виде гибкого трубчатого элемента, представляющего собой герметичную трубу некруглого поперечного сечения (см. рис. 1).

Принцип действия рабочего органа заключается в следующем. При подаче давления в полость стойки 2 через штуцер 3 рабочей жидкости либо воздуха происходит деформация сечения, в результате этого её свободный конец с рыхлительной лапой 1 совершает перемещение. При подаче пульсирующего давления рыхлительная лапа совершает колебательные движения с определенной амплитудой и частотой, которые зависят от параметров подаваемого давления. Изменяя параметры давления, можно задать различные режимы колебания, что позволит снизить тяговое сопротивление.

### **Цель исследования**

Целью работы является обоснование параметров рабочего органа культиватора со стойкой в виде гибкого трубчатого элемента, обеспечивающего снижение тягового сопротивления и повышение качественных показателей обработки почвы.

Для решения задач проектирования рабочего органа со стойками в виде гибкого трубчатого элемента необходима математическая модель взаимодействия рабочего органа с почвой, которая с наименьшими временными затратами и с приемлемой для инженерной практики точностью позволит оптимизировать параметры рабочего органа с учетом различных факторов.

### **Метод исследования**

Действие внутреннего давления  $p$  проявляется в том, что свободный конец полой стойки, в месте крепления рыхлительной лапы, совершает перемещение. Величина изгибающего момента, возникающего в сечении стойки, пропорциональна величине давления  $p$  и может быть определена на основании полубезмоментной теории оболочек [3]. Поэтому задача об определении перемещения стойки под действием давления эквивалентна задаче перемещения трубки под действием момента, приложенного к ее свободному концу. Таким образом, внутреннее давление  $p$  входит в уравнения движения (1) посредством изгибающего момента  $f_m$ .

Стойка представляет собой трубку постоянного плоскоовального либо эллиптического сечения, изогнутую по дуге окружности, один конец которой жестко закреплен, а другой свободен, рис. 1. На свободном конце закреплена рыхлительная лапа массой  $m_1$ .

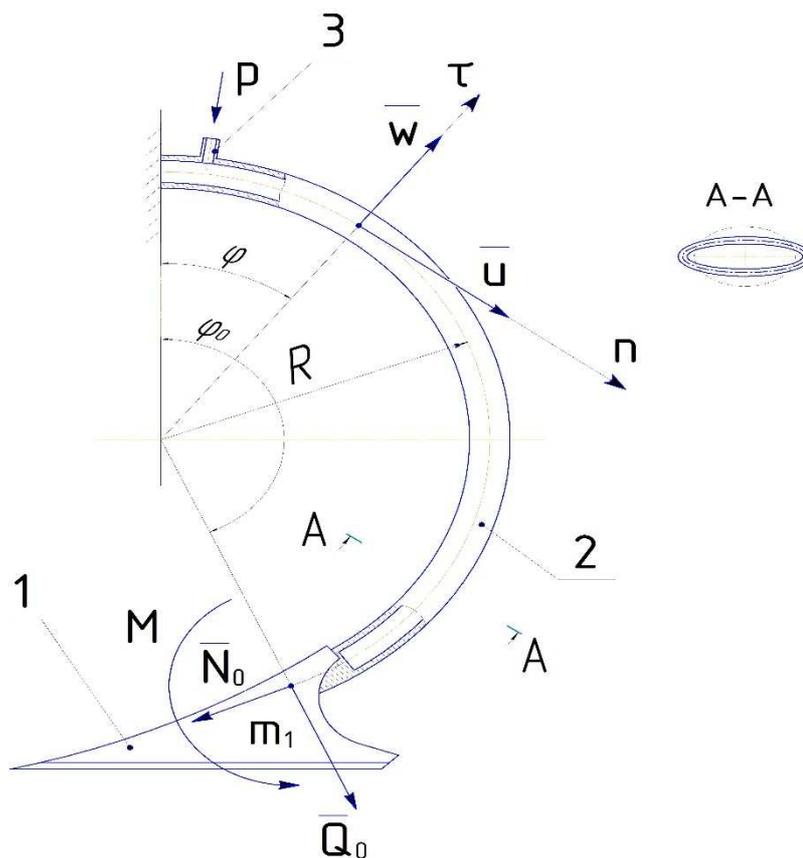


Рис. 1. Расчетная схема рабочего органа культиватора со стойкой в виде гибкого трубчатого элемента: 1 – рыхлительная лапа; 2 – стойка; 3 – штуцер

Внутри трубки может создаваться переменное давление  $p(t)$ . Давление  $p(t)$  вызывает изменение кривизны от трубки и, следовательно, перемещение её свободного конца. Кроме того, на груз, то есть на конец трубки, может действовать осевая сила  $N$  и поперечная  $Q$ , направленные по касательной и по нормали к оси стержня, а также момент  $M$ , рис. 1.

Длина трубки во много раз превосходит размеры поперечного сечения, поэтому трубку будем рассматривать как стержень, изогнутый по дуге окружности радиуса  $R$ . Масса груза  $m_1$  значительно больше массы трубки  $m_0$ .

Уравнение движения стержня можно получить из уравнения равновесия В.В. Новожилова с помощью принципа Даламбера [4].

$$\begin{cases} \gamma(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{R \partial \varphi} - \frac{\partial M}{R^2 \partial \varphi} + q_\tau, \\ \gamma(\varphi) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{N}{R} - \frac{\partial^2 M}{R^2 \partial \varphi^2} + q_n, \end{cases} \quad (1)$$

$$N = \frac{D}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right), M = \frac{H}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), Q = -\frac{\partial M}{R \partial \varphi}. \quad (2)$$

Граничные условия в точке  $\varphi=0$ :

$$u(0,t)=0, w(0,t)=0, \frac{\partial w(0,t)}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

В точке  $\varphi = \varphi_0$ :

$$N(\varphi_0, t) = f_\tau, Q(\varphi_0, t) = f_n, M(\varphi_0, t) = f_M. \quad (4)$$

Начальные условия запишем в виде:

$$\begin{aligned} u(\varphi, 0) = u_0(\varphi), \frac{\partial u(\varphi, 0)}{\partial t} = 0, \\ w(\varphi, 0) = w_0(\varphi), \frac{\partial w(\varphi, 0)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В этих уравнениях:  $u(\varphi, t)$ ,  $w(\varphi, t)$  – перемещения точки оси стержня с координатой  $\varphi$ ;  $N(\varphi, t)$ ,  $Q(\varphi, t)$  – осевая и поперечная (перерезывающая) сила;  $M(\varphi, t)$  – изгибающий момент в сечении  $\varphi$ ;  $D = E \cdot A$  – осевая жесткость трубки;  $H = E \cdot I$  – изгибная жесткость трубки;  $E$  – модуль упругости материала трубки;  $\gamma(\varphi)$  – погонная масса трубки;  $q_\tau$  и  $q_n$  – осевая и нормальное распределение нагрузки на стержень, они могут зависеть от  $\varphi, t, u, w, p, \dot{u}, \dot{w}$  причем зависимость в общем случае может быть нелинейной и достаточно сложной;  $f_\tau, f_n, f_M$  – силы, приложенные к рыхлительной лапе и действующие со стороны почвы, они также могут зависеть от  $\varphi, t, u, w, p, \dot{u}, \dot{w}$  и от физико-механических свойств почвы [1].

Кроме того, на решение также влияет масса лапы  $m_l$ , которая непосредственно не входит в уравнения (1) – (5). Для учета массы лапы будем считать погонную массу трубки, перемещенной по длине. При численном решении задачи это более простой вариант. Поэтому приближенно систему можно рассматривать как материальную точку, на которую действуют силы упругости со стороны стержня и внешние силы  $f_\tau, f_n$ .

Распределенные нагрузки  $q_\tau$  и  $q_n$  действуют на небольшую часть стойки и значительно меньше по величине, чем силы  $f_\tau$  и  $f_n$ , или будем пренебрегать. Рассмотрим движение точки только в плоскости кривизны трубчатого элемента, поэтому точка имеет две степени свободы  $u$  и  $w$ .

Для решения динамической задачи для материальной точки необходимо определить зависимость сил упругости, действующих на точку от её перемещений. Так как массой стержня и распределенными нагрузками  $q_\tau$  и  $q_n$  пренебрегаем, то уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{dN}{d\varphi} - \frac{dM}{Rd\varphi} = 0, \\ N + \frac{d^2 M}{Rd\varphi^2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Граничные условия при  $\varphi = 0$ :

$$u = w = w' = 0. \quad (7)$$

При  $\varphi = \varphi_0$ , будем считать заданными перемещения и угол поворота  $\theta$ :

$$u(\varphi_0) = u_0, w(\varphi_0) = w_0, \theta(\varphi_0) = \theta_0. \quad (8)$$

Продифференцируем первое уравнение (6) по  $\varphi$  и сложим со вторым:

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$N = c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi. \quad (9)$$

Из (5) и (6,1) находим:

$$Q = -\frac{dM}{Rd\varphi} = -\frac{dN}{d\varphi} = -c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi. \quad (10)$$

Из (10) находим

$$\frac{dM}{d\varphi} = Rc_1 \cos \varphi - Rc_2 \sin \varphi.$$

Отсюда

$$M = Rc_1 \sin \varphi + Rc_2 \cos \varphi + c_3. \quad (11)$$

Из полученных соотношений (9), (10), (11) выразим  $c_1, c_2, c_3$  через  $N, Q$  и  $M$ :

$$\begin{cases} c_1 = N \sin \varphi - Q \cos \varphi, \\ c_2 = N \cos \varphi + Q \sin \varphi, \\ c_3 = M - R \cdot N. \end{cases} \quad (12)$$

Определим перемещения из (5) имеем:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\varphi} + w = \frac{R}{D} N, \\ -\frac{du}{d\varphi} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} = \frac{R^2}{H} M. \end{cases} \quad (13)$$

Складываем почленно:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{R}{D} N + \frac{R}{H} M = \frac{R^3}{H} \left(1 + \frac{H}{R^2 D}\right) c_1 \sin \varphi + \frac{R^3}{H} \left(1 + \frac{H}{R^2 D}\right) c_2 \cos \varphi + \frac{R^2}{H} c_3.$$

В реальных задачах безразмерная величина

$$\frac{H}{R^2 D} \ll 1. \quad (14)$$

Будем пренебрегать этой величиной по сравнению с  $c_1$ . Такое допущение эквивалентно предположению, что осевая жесткость  $D$  бесконечно большая величина, то есть ось трубки в процессе деформации не удлиняется.

Итак, получим:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{R^3}{H} \sin \varphi \cdot c_1 + \frac{R^3}{H} \cos \varphi \cdot c_2 + \frac{R^2}{H} c_3.$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений:

$$w = -\frac{R^3}{2H} \varphi \cos \varphi \cdot c_1 + \frac{R^3}{2H} \cdot \varphi \sin \varphi \cdot c_2 + \frac{R^2}{H} c_3 + \sin \varphi \cdot c_4 + \cos \varphi \cdot c_5. \quad (15)$$

Найдем еще производную:

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{R^3}{2H} (-\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) c_1 + \frac{R^3}{2H} (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) c_2 + \cos \varphi \cdot c_4 - \sin \varphi \cdot c_5. \quad (16)$$

Из (13) находим

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{R}{D} N - w.$$

Подставляем сюда выражения (9) и (15) и интегрируем:

$$u = \frac{R^3}{2H} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) c_1 - \frac{R^3}{2H} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) c_2 - \frac{R^2}{H} \varphi \cdot c_3 + \cos \varphi \cdot c_4 - \sin \varphi \cdot c_5 + c_6. \quad (17)$$

С помощью граничных условий (7) выразим неопределенные коэффициенты  $c_4, c_5, c_6$  через  $c_1, c_2, c_3$ .

Подставляем в (17), (15) и (16)  $\varphi=0$ , получим:

$$\begin{cases} u(0) = \frac{R^3}{2H} c_1 + c_4 + c_6 = 0, \\ w(0) = \frac{R^2}{H} c_3 + c_5 = 0, \\ w'(0) = -\frac{R^3}{2H} c_1 + c_4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$c_4 = \frac{R^3}{2H} c_1, \quad c_5 = -\frac{R^2}{H} c_3, \quad c_6 = -\frac{R^3}{2H} c_1 - c_4 = -\frac{R^3}{H} c_1.$$

Учитывая еще выражения (12) получим:

$$\begin{cases} c_4 = \frac{R^3}{2H} \sin \varphi N - \frac{R^3}{2H} \cos \varphi \cdot Q, \\ c_5 = \frac{R^3}{H} N - \frac{R^2}{H} M, \\ c_6 = -\frac{R^3}{2H} \sin \varphi \cdot N + \frac{R^3}{2H} \cos \varphi \cdot Q. \end{cases} \quad (18)$$

Подставляем в (17) и (15) полученные зависимости (18) и (12), получим выражение для перемещений через усилия  $N, Q$  и  $M$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{R^3}{H} \left( \frac{3\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right) N + \frac{R^3}{H} \left( \cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} - 1 \right) Q + \frac{R^2}{H} (\sin \varphi - \varphi) M, \\ w &= \frac{R^3}{H} \left( \cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} - 1 \right) N + \frac{R^3}{H} \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{2} \right) Q + \frac{R^2}{H} (1 - \cos \varphi) \cdot M. \end{aligned} \quad (19)$$

Если подставить  $\varphi = \varphi_0$ , то получим перемещения груза  $u_0 = u(\varphi_0)$  и  $w_0 = w(\varphi_0)$  в зависимости от сил  $N_0 = N(\varphi_0)$ ,  $Q_0 = Q(\varphi_0)$  и момента  $M_0 = M(\varphi_0)$ , приложенных к концу стержня.

Запишем (19) в виде:

$$\begin{cases} u_0 = P_{11} \cdot N_0 + P_{12} \cdot Q_0 + P_{13} \cdot M_0, \\ w_0 = P_{21} \cdot N_0 + P_{22} \cdot Q_0 + P_{23} \cdot M_0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{R^3}{H} \left( \frac{3\varphi_0}{2} + \frac{\sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0}{2} - 2 \sin \varphi_0 \right), P_{12} = \frac{R^3}{H} \left( \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} - 1 \right), \\ P_{13} &= \frac{R^2}{H} (\sin \varphi_0 - \varphi_0), \\ P_{21} &= \frac{R^3}{H} \left( \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} - 1 \right), \\ P_{22} &= \frac{R^3}{H} \left( \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{2} \right), \\ P_{23} &= \frac{R^2}{H} (1 - \cos \varphi_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Выразим  $N_0, Q_0$  через  $u_0, w_0, M_0$ :

$$\begin{cases} P_{11}N_0 + P_{12}Q_0 = u_0 - P_{13} \cdot M_0, \\ P_{21}N_0 + P_{22}Q_0 = w_0 - P_{23} \cdot M_0. \end{cases}$$

Решаем эту систему по формулам Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta &= P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}, \Delta_1 = (u_0 - P_{13}M_0)P_{22} - (w_0 - P_{23}M_0)P_{12}, \\ \Delta_2 &= (w_0 - P_{23}M_0)P_{11} - (u_0 - P_{13}M_0)P_{21}. \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{cases} N_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{P_{22}}{\Delta} u_0 - \frac{P_{12}}{\Delta} w_0 - \frac{P_{22}P_{13} - P_{23}P_{12}}{\Delta} M_0, \\ Q_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{P_{21}}{\Delta} u_0 + \frac{P_{11}}{\Delta} w_0 - \frac{P_{23}P_{11} - P_{13}P_{21}}{\Delta} M_0. \end{cases}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{P_{22}}{\Delta}, c_{12} = -\frac{P_{12}}{\Delta}, c_{13} = \frac{P_{22}P_{13} - P_{23}P_{12}}{\Delta}, \\ c_{21} &= -\frac{P_{21}}{\Delta}, c_{22} = \frac{P_{11}}{\Delta}, c_{23} = \frac{P_{23}P_{11} - P_{13}P_{21}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда:

$$\begin{cases} N_0 = c_{11}u_0 + c_{12}w_0 - c_{13}M_0, \\ Q_0 = c_{21}u_0 + c_{22}w_0 - c_{23}M_0. \end{cases} \quad (22)$$

В этих выражениях:  $N_0$  и  $Q_0$  – силы, действующие на пружину со стороны лапы;  $u_0$  и  $w_0$  – перемещения конца стойки,  $M_0$  – момент, действующий на стойку.

Момент  $M_0$  может создаваться внутренним давлением  $p$ , вызывающим изменение кривизны стойки. При определении перемещений конца стойки предполагается, что момент во всех сечениях одинаков, поэтому его можно считать приложенным к концу стойки и равным  $M_0$ .

Для составления дифференциальных уравнений движения лапы необходимо знать действующие на него силы. Со стороны пружины на лапу действуют силы  $-\overline{N}_0$  и  $-\overline{Q}_0$  направленные в противоположные стороны по отношению к силам  $\overline{N}_0$  и  $\overline{Q}_0$ . Кроме того, на него действуют внешние силы  $f_\tau$  и  $f_n$ , заданные в граничных условиях (4).

Запишем дифференциальные уравнения движения лапы в системе координат с осями  $\tau$  и  $n$ , (рис. 1.)

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 u}{dt^2} = -N_0 + f_\tau, \\ m_1 \frac{d^2 w}{dt^2} = -Q_0 + f_n. \end{cases}$$

Подставляем сюда выражения для  $\overline{N}_0$  и  $\overline{Q}_0$  из (22):

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 u_0}{dt^2} + c_{11} u_0 + c_{12} w_0 = f_\tau + c_{13} M_0, \\ m_1 \frac{d^2 w_0}{dt^2} + c_{21} u_0 + c_{22} w_0 = f_n + c_{23} M_0. \end{cases} \quad (23)$$

Величины  $c_{11}, c_{12} = c_{21}, c_{22}, c_{13}, c_{23}$  – постоянные, определяются из (20), (21), силы  $f_\tau$  и  $f_n$  могут зависеть от  $t, p, \dot{u}, \dot{w}$  и от других параметров, причем эта зависимость может быть нелинейной и сложной.

Уравнения движения (23) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Общее решение для произвольной правой части получить невозможно, но для некоторых частных случаев аналитическое решение можно получить.

Таким образом, получена математическая модель активного рабочего органа культиватора со стойкой в виде гибкого трубчатого элемента, позволяющая учитывать действие пульсирующего давления и силовых факторов со стороны почвы.

### Список литературы

1. Кулен А., Куиперс Х. Современная земледельческая механика [Под ред. И с предисл. Ю.А. Смирнова]. – М.: Агропромиздат, 1986.– 349 с.

2. Маратканов А.А., Смолин Н.И., Кокошин С.Н., Устинов Н.Н. Рабочий орган культиватора // Патент России RU 116000 U1. – Заявл. 03.05.2011, №2011117732/13; Оpubл. 20.05.2012.
3. Пирогов С.П. Манометрические трубчатые пружины. – СПб.: ООО «Недра», 2009. – 276 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для вузов. – М: Наука, 1988 – 712 с.
5. Устинов Н.Н., Кокошин С.Н., Смолин Н.И. Рабочий орган культиватора // Патент России №2009136304 А– Заявл. 30.09.2009, №2009136304/21; Оpubл. 20.09.2011.

**Рецензенты:**

Чумаков В.Г., д.т.н., доцент, заведующий кафедрой тракторов и сельскохозяйственных машин ФГБОУ ВПО «Курганская государственная сельскохозяйственная академия имени Т.С. Мальцева», Курганская область, с. Лесниково;

Фоминых А.В., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой механизации животноводства ФГБОУ ВПО «Курганская государственная сельскохозяйственная академия имени Т.С. Мальцева», Курганская область, с. Лесниково.