

## ПОСТРОЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ТРЕНДА ИМИТИРУЕМОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Куликова О.В.<sup>1</sup>, Куликова И.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФБГОУ ВПО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, Россия (620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66), kulikova1000@rambler.ru

Представлены материалы, иллюстрирующие этапы исследовательской деятельности при составлении тригонометрического тренда периодического процесса, имитирующего функционирование некоторой технической системы, совершающей колебательное движение. При построении математической модели используются результаты автокорреляционного анализа эмпирических данных и аппарат проверки статистических гипотез. Характерные особенности функциональных зависимостей для точечной и интервальной оценки полученного тренда раскрываются с помощью их графических моделей. Оценка качества уравнения тренда проводится с применением распределения Фишера—Снедекора. Моделирование колебательного движения по заданной функциональной зависимости проводится с привлечением генератора случайных чисел. Описание эмпирических данных ограничивается составлением тригонометрического тренда с одной гармоникой. Предложенная систематизация теоретических сведений направлена на формирование умений по обобщению эмпирических результатов исследования периодических процессов на основе аппарата математической статистики.

Ключевые слова: имитационное моделирование, тригонометрический тренд, автокорреляционный анализ, точечная оценка тренда, интервальная оценка тренда.

## TRIGONOMETRIC TREND APPLICATION FOR SIMULATION PERIODIC PROCESSES IN RESEARCH ACTIVITIES

Kulikova O.V.<sup>1</sup>, Kulikova I.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, Russia (620034, Ekaterinburg, Kolmogorova st. 66), kulikova1000@rambler.ru

In this paper we illustrate stages of the research activities in the preparation periodic process trigonometric trend that simulates the technical system oscillate operation. We use empirical data autocorrelation analysis results and testing apparatus statistical hypothesis for constructing a mathematical model. The characteristic features of functional dependencies for point and interval estimates obtained trend revealed through their graphical models. Assessment of the trend equation quality is carried out using the Fischer-Snedokor distribution. We use random number generator for modeling periodical moving. Description of empirical data is limited to the construction of trigonometric trend with one harmonica. Presented systematization of the proposed analytical and synthetic operations aimed at forming abilities to synthesize empirical results based on mathematical statistics.

Keywords: simulation, trigonometric trend, autocorrelation analysis, the point estimate of the trend, interval estimate of the trend.

Исследование системных объектов различной природы в современных условиях неразрывно связано с имитационным моделированием [5, 6], которое позволяет создавать разнообразные детерминировано-вероятностные функциональные зависимости, имитирующие работу заданной системы с помощью генератора случайных чисел. Получаемая исследователем информация для анализа программируемых закономерностей представляет собой массивы эмпирических данных о значениях независимых и зависимых переменных. Построение математической модели, устанавливающей взаимосвязь искомых и известных величин, предоставляет возможность провести тестирование программы автоматических вычислений на адекватность отражения существенных закономерностей,

присущих исследуемому объекту, проявляющему системные свойства. Если независимой переменной выступает время, то представляется целесообразным рассматривать величины, изменяемые во времени, как временные ряды.

Подбор линейной или нелинейной модели тренда для описания закономерностей эмпирических данных подробно рассматривается в работах [1, 2, 3, 7, 8]. Определению параметров тригонометрического тренда, значения уровней которых повторяются с некоторым периодом, для исследования периодических процессов уделяется недостаточное внимание. Это связано прежде всего с трудоемкостью вычислительных процедур, обеспечивающих нахождение параметров исследуемых закономерностей. Функционирование многих технических систем или устройств рассматривается как колебательное движение, математической моделью которых выступают разнообразные композиции тригонометрических функций, поэтому представляется целесообразным систематизировать информацию о составлении тригонометрического тренда и проверке его статистической значимости. Иллюстрация содержания исследовательской деятельности, направленной на построение математической модели периодического процесса, представляет собой последовательное описание операций статистического анализа эмпирических данных, полученных при имитационном моделировании колебательного движения некоторой технической системы. Формирование исследовательских умений может включать следующие этапы: восприятие понятия тригонометрического тренда; получение эмпирических данных периодического процесса; составление точечной и интервальной оценки тригонометрического тренда; оценка качества уравнения тренда.

### **Результаты и обсуждение**

*Восприятие понятия тригонометрического тренда.* Временным рядом  $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$  ( $n$  – число уровней ряда) называется упорядоченная последовательность наблюдений над некоторыми явлениями, характер которых меняется во времени. Особенностью временного ряда является то, что порядок последовательности  $t_1, t_2, \dots, t_n$  существенен для анализа, а время выступает как один из определяющих факторов [1, 2, 3, 8].

Математическая модель точечной оценки тригонометрического тренда имеет следующий вид [2]:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} \left( a_{2j-1} \cos\left(\frac{2\pi j}{m} t\right) + a_{2j} \sin\left(\frac{2\pi j}{m} t\right) \right) + a_{m-1} (-1)^t, \quad (1)$$

где  $\hat{y}_t$  – моделируемое значение  $y_t$ ;  $a_0, a_{2j-1}, a_{2j}$  – параметры тренда,  $j = 1, \dots, m/2 - 1$ ;  $m$  – период тренда.

Параметры тригонометрического тренда  $a_0, a_{2j-1}, a_{2j}$  определяются с помощью метода наименьших квадратов и вычисляются по формулам [2]:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{t_i} \quad a_{2j-1} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m \bar{y}_i \cos\left(\frac{2\pi j}{m} t_i\right) \quad a_{2j} = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m \bar{y}_i \sin\left(\frac{2\pi j}{m} t_i\right) \quad (2)$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{l} \sum_{p=1}^l y_{t_{i+m(p-1)}}, \quad l = \frac{n}{m}, l = 1, 2, \dots, m,$$

где  $l$  – количество периодов временного ряда.

Выделение периодической составляющей временного ряда осуществляется с помощью автокорреляционного анализа, который характеризует степень тесноты связи между наблюдениями  $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$  и сдвинутыми относительно их на  $s$  уровней наблюдениями  $y_{t_{1+s}}, y_{t_{2+s}}, \dots, y_{t_{n+s}}$ . Коэффициент автокорреляции  $r_s$ , определяющий автокорреляционную зависимость между членами одного и того же ряда, но смещенными на  $s$  уровней, находится по формуле [1, 7]:

$$r_s = \left( \sum_{i=s+1}^n (y_{t_i} - \bar{y}_{t_s})(y_{t_{i-s}} - \bar{y}_{t_{i-s}}) \right) / \sqrt{\sum_{i=s+1}^n (y_{t_i} - \bar{y}_{t_s})^2 \sum_{i=s+1}^n (y_{t_{i-s}} - \bar{y}_{t_{i-s}})^2}, \quad (3)$$

$$\bar{y}_{t_s} = \frac{1}{n-s} \sum_{i=s+1}^n y_{t_i}, \quad \bar{y}_{t_{i-s}} = \frac{1}{n-s} \sum_{i=s+1}^{n-k} y_{t_i}.$$

Если временной ряд имеет периодическую составляющую, то значения коэффициента автокорреляции  $r_s$ , не меньшие, чем значение  $r_1$ , будет повторяться через количество уровней, равных периоду. Наглядное представление автокорреляционной функции получают с помощью ее графика – автокоррелограммы [1, 7].

Оценка качества уравнения тренда определяется с помощью коэффициента детерминации  $R^2$ , вычисление которого проводится по формуле:

$$R^2 = \left( \sum_{i=1}^n (\hat{y}_{t_i} - \bar{y}_t)^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^n (y_{t_i} - \bar{y}_t)^2 \right), \quad \bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{t_i}. \quad (4)$$

Статистическая значимость уравнения тренда устанавливается по  $F$ -критерию (распределение Фишера–Снедекора) на уровне значимости  $\alpha$  при числе степеней свободы  $k_1, k_2$  ( $k_1 = n, k_2 = n - k - 1, k$  – количество параметров  $a_i, i = 1, \dots, m - 2$ ). Связь между значениями уровней временного ряда и временем считается статистически значимой, если выполняется неравенство [2, 3]:

$$F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}(\alpha; k_1, k_2). \quad (5)$$

Значение критической точки  $F_{кр}(\alpha; k_1, k_2)$  на уровне значимости  $\alpha$  при числе степеней свободы  $k_1, k_2$  определяется по таблице распределения Фишера–Снедекора, а наблюдаемое значение  $F_{набл}$  критерия Фишера–Снедекора вычисляется по формуле [2, 3]:

$$F_{набл} = \frac{R^2(n - k - 1)}{(1 - R^2)k}, \quad (6)$$

Уравнения нижней  $\hat{y}_н$  и верхней  $\hat{y}_в$  границ интервальной оценки ( $\hat{y}_т - \Delta; \hat{y}_т + \Delta$ ) тренда составляются с учетом абсолютной погрешности  $\Delta$  по следующим формулам:

$$\hat{y}_н = \hat{y}_т - \Delta, \quad \hat{y}_в = \hat{y}_т + \Delta, \quad \Delta = t_{кр}(\alpha; n - k - 1)\sigma, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n - k - 1} \sum_{i=1}^n (y_{t_i} - \hat{y}_{t_i})^2, \quad (7)$$

где  $t_{кр}(\alpha; n - k - 1)$  – значение критической точки распределения Стьюдента на уровне значимости  $\alpha$  при числе степеней свободы  $n - k - 1$ ;  $\sigma^2$  – дисперсия случайной составляющей.

*Получение эмпирических данных периодического процесса.* Колебательное движение некоторой технической системы моделировалось на основе математической модели, параметры которой подбираются с помощью программного обеспечения ЭВМ. Использование в программе генератора случайных значений имитировало проявление детерминировано-вероятностных закономерностей. В ходе проведения вычислительного эксперимента фиксировались значение величины  $f(t)$ , изменяющейся во времени (рис. 1, табл. 1).

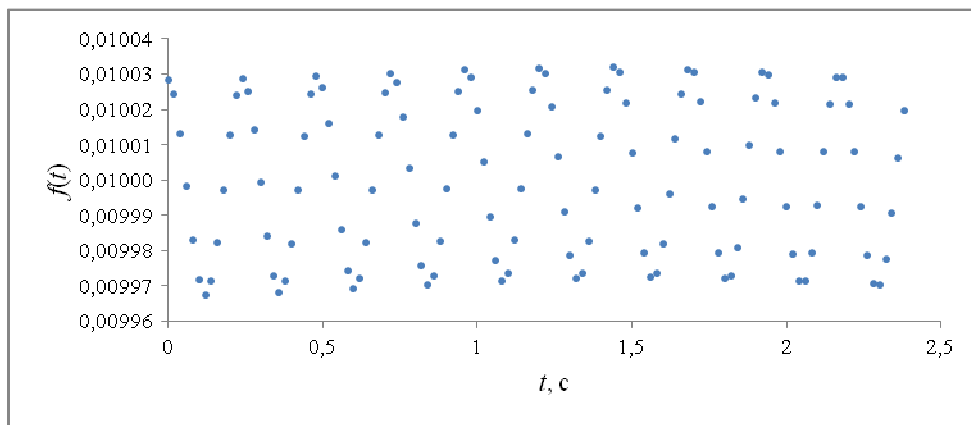


Рис. 1. Графическое представление эмпирических данных

Таблица 1

Значения величины  $f(t)$

$i$	$t_{i-1}$	$f(t_{i-1})$	$i$	$t_{i-1}$	$f(t_{i-1})$	$i$	$t_{i-1}$	$f(t_{i-1})$	$i$	$t_{i-1}$	$f(t_{i-1})$	$i$	$t_{i-1}$	$f(t_{i-1})$
1	0	0,01003	25	0,48	0,01003	49	0,96	0,01003	73	1,44	0,01003	97	1,92	0,01003
2	0,02	0,01002	26	0,50	0,01003	50	0,98	0,01003	74	1,46	0,01003	98	1,94	0,01003
3	0,04	0,01001	27	0,52	0,01002	51	1,00	0,01002	75	1,48	0,01002	99	1,96	0,01002
4	0,06	0,01000	28	0,54	0,01000	52	1,02	0,01001	76	1,50	0,01001	100	1,98	0,01001
5	0,08	0,00998	29	0,56	0,00999	53	1,04	0,00999	77	1,52	0,00999	101	2	0,00999
6	0,10	0,00997	30	0,58	0,00997	54	1,06	0,00998	78	1,54	0,00998	102	2,02	0,00998
7	0,12	0,00997	31	0,60	0,00997	55	1,08	0,00997	79	1,56	0,00997	103	2,04	0,00997

8	0,14	0,00997	32	0,62	0,00997	56	1,10	0,00997	80	1,58	0,00997	104	2,06	0,00997
9	0,16	0,00998	33	0,64	0,00998	57	1,12	0,00998	81	1,60	0,00998	105	2,08	0,00998
10	0,18	0,01000	34	0,66	0,01000	58	1,14	0,01000	82	1,62	0,01000	106	2,1	0,00999
11	0,20	0,01001	35	0,68	0,01001	59	1,16	0,01001	83	1,64	0,01001	107	2,12	0,01001
12	0,22	0,01002	36	0,70	0,01002	60	1,18	0,01003	84	1,66	0,01002	108	2,14	0,01002
13	0,24	0,01003	37	0,72	0,01003	61	1,20	0,01003	85	1,68	0,01003	109	2,16	0,01003
14	0,26	0,01003	38	0,74	0,01003	62	1,22	0,01003	86	1,70	0,01003	110	2,18	0,01003
15	0,28	0,01001	39	0,76	0,01002	63	1,24	0,01002	87	1,72	0,01002	111	2,2	0,01002
16	0,30	0,01000	40	0,78	0,01000	64	1,26	0,01001	88	1,74	0,01001	112	2,22	0,01001
17	0,32	0,00998	41	0,80	0,00999	65	1,28	0,00999	89	1,76	0,00999	113	2,24	0,00999
18	0,34	0,00997	42	0,82	0,00998	66	1,30	0,00998	90	1,78	0,00998	114	2,26	0,00998
19	0,36	0,00997	43	0,84	0,00997	67	1,32	0,00997	91	1,80	0,00997	115	2,28	0,00997
20	0,38	0,00997	44	0,86	0,00997	68	1,34	0,00997	92	1,82	0,00997	116	2,3	0,00997
21	0,40	0,00998	45	0,88	0,00998	69	1,36	0,00998	93	1,84	0,00998	117	2,32	0,00998
22	0,42	0,01000	46	0,90	0,01000	70	1,38	0,01000	94	1,86	0,00999	118	2,34	0,00999
23	0,44	0,01001	47	0,92	0,01001	71	1,40	0,01001	95	1,88	0,01001	119	2,36	0,01001
24	0,46	0,01002	48	0,94	0,01003	72	1,42	0,01003	96	1,90	0,01002	120	2,38	0,01002

Составление точечной и интервальной оценок тригонометрического тренда. Для выявления периодической составляющей вычисляются по формуле (3) с использованием функции «КОРРЕЛ» электронных таблиц Excel [4] 16 значений коэффициента автокорреляции, строится автокоррелограмма (рис. 2) и определяется период тригонометрического тренда ( $m = 12$ ).

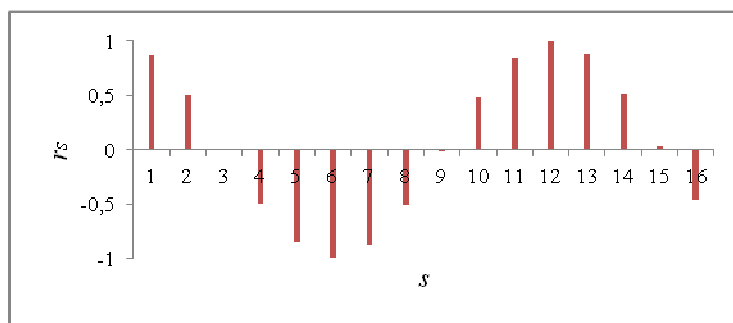


Рис. 2. Автокоррелограмма эмпирических данных

Наибольшее значение амплитуды тригонометрического тренда наблюдается у первой гармоники, поэтому в практических случаях часто ограничиваются построением математической модели  $f^*(t)$  с одной гармоникой по формуле (1), учитывая, что  $j = 1$ . Графическая модель точечной оценки тренда представлена на рисунке 3, а ее уравнение имеет вид:

$$f^*(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\left(\frac{t - t_0}{\Delta t} + 1\right)\right) + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(\frac{t - t_0}{\Delta t} + 1\right)\right), \quad (8)$$

где  $t_0$  – начальный момент времени,  $\Delta t$  – шаг изменения времени.

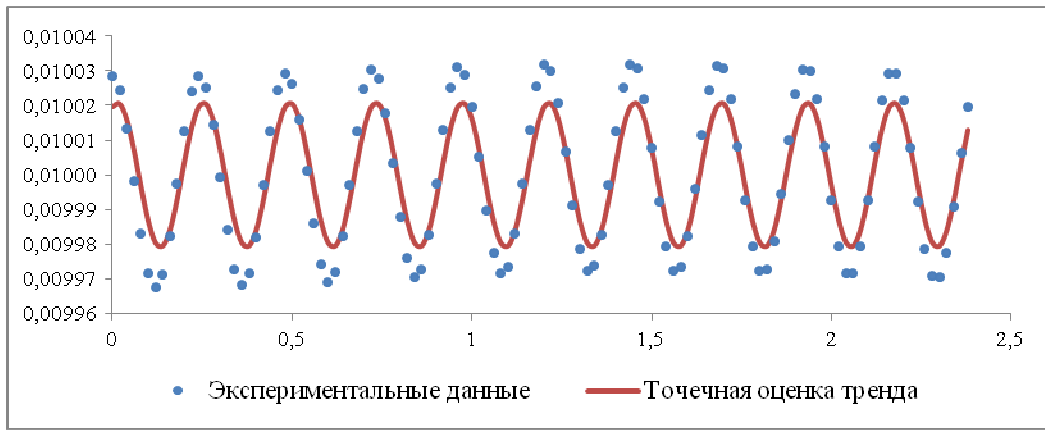


Рис. 3. Точечная оценка тренда

В формуле (8) учтена особенность того, что отсчет времени может начинаться с  $t_0$  и изменяться с шагом  $\Delta t$ , в отличие от того, что отсчет уровней временного ряда начинается от единицы и изменяется с шагом, также равным единице. Параметры  $a_0, a_1, a_2$  функции  $f^*(t)$  находятся для  $n = 120$  и  $l = 10$  по формуле (2) и принимают следующие значения:

$$a_0 = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{120} f(t_{i-1}) = a_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} \bar{f}_i \cos\left(\frac{\pi i}{6}\right) = 1,35 \cdot 10^{-5},$$

$$a_2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} \bar{f}_i \sin\left(\frac{\pi i}{6}\right) = 1,59 \cdot 10^{-5}.$$

Средние значения  $\bar{f}_i$   $i$ -ого уровня всех  $l$  периодов вычисляется по формуле:

$$\bar{f}_i = \frac{1}{10} \sum_{p=1}^{10} f_{t_{i+10(p-1)}}, i = 1, 2, \dots, 12,$$

а их множество представлено в таблице 2. В данном эксперименте  $t_0 = 0, \Delta t = 0,02$  с.

Таблица 2

Средние значения всех уровней периода тренда

$i$	1	2	3	4	5	6
$\bar{f}_i$	0,01003	0,01003	0,01002	0,01001	0,00999	0,00998
$i$	7	8	9	10	11	12
$\bar{f}_i$	0,00997	0,00997	0,00998	0,01000	0,01001	0,01002

Интервальная оценка  $(f^*(t) - \Delta; f^*(t) + \Delta)$  тригонометрического тренда определяется по  $t$ -критерию (распределение Стьюдента) на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  при числе степеней свободы 117 по формуле (7). Уравнения нижней  $f_n^*(t)$  и верхней  $f_b^*(t)$  границ интервальной оценки имеют вид:

$$f_n^*(t) = 998,4 \cdot 10^{-5} + 1,35 \cdot 10^{-5} \cos\left(\frac{\pi}{6}(50t + 1)\right) + 1,59 \cdot 10^{-5} \sin\left(\frac{\pi}{6}(50t + 1)\right),$$

$$f_b^*(t) = 1015,9 \cdot 10^{-5} + 1,35 \cdot 10^{-5} \cos\left(\frac{\pi}{6}(50t + 1)\right) + 1,59 \cdot 10^{-5} \sin\left(\frac{\pi}{6}(50t + 1)\right).$$

Графические модели уравнений  $f_n^*(t)$  и  $f_b^*(t)$  представлены на рисунке 4.

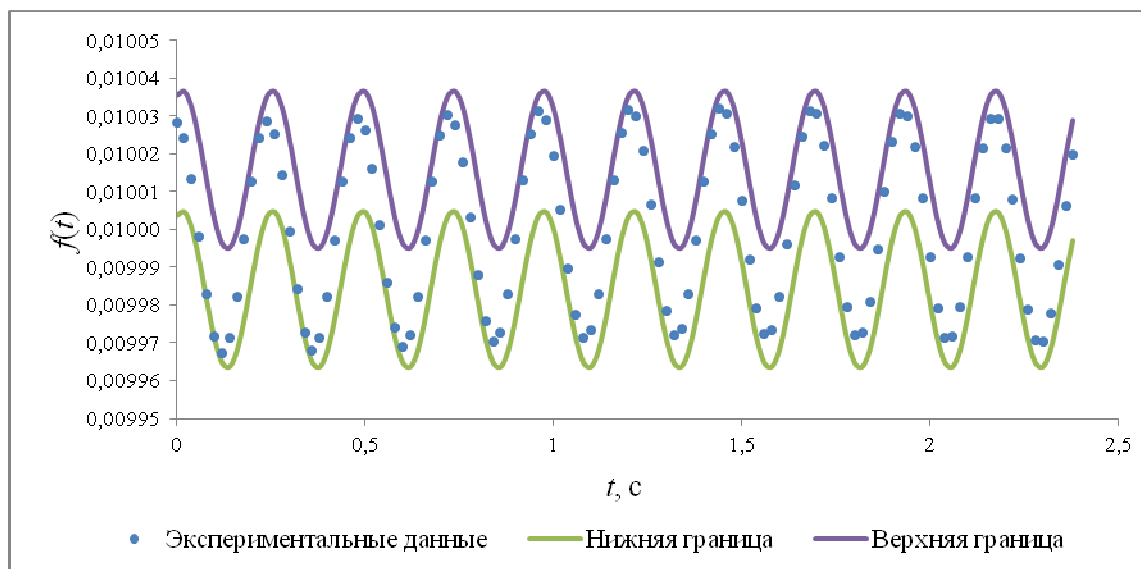


Рис. 4. Интервальная оценка тригонометрического тренда

Интервал  $(f^*(t) - \Delta; f^*(t) + \Delta)$  покрывает все эмпирические данные (рис. 4), следовательно, ограничение одной гармоникой тригонометрического тренда успешно описывает результаты проведенного вычислительного эксперимента.

*Оценка качества уравнения тренда.* Коэффициент детерминации  $R^2$  вычисляется по формуле (6) и в данном исследовании принимает значение, равное 0,47. Значимость  $R^2$ , определяемая по  $F$ -критерию (распределение Фишера—Снедекора), характеризует возможность применения уравнения тренда  $f^*(t)$  для описания рассматриваемого периодического процесса. По результатам вычислений устанавливается, что связь между значениями функции  $f^*(t)$ , разделенными  $\Delta t$  (значениями уровней временного ряда), статистически значима на уровне  $\alpha = 0,05$  при числе степеней свободы  $k_1 = 120$  и  $k_2 = 117$ , так как неравенство (5) выполняется ( $F_{\text{набл}} = 52,68$ ;  $F_{\text{кр}}(0,05; 120; 117) = 1,35$ ). Математическая модель интервальной оценки функциональной зависимости  $f^*(t)$  адекватно отображает взаимосвязи совершаемого некоторой технической системой колебательного движения  $f(t)$ , информация о котором представлена в табличной форме (таблица 1).

### Заключение

Представление тригонометрического тренда двумя и более гармониками позволяет получить более точные результаты по моделированию периодического процесса. Количество гармоник, которое включается в математическую модель, определяется допустимой точностью функционирования заданной технической системы. При этом обязательно учитывается условие о покрытии интервальной оценкой составляемой функциональной зависимости размаха отклонений амплитуды колебаний. Предложенные этапы построения тригонометрического тренда могут использоваться в учебно-исследовательской

деятельности студентов технических направлений подготовки при изучении дисциплин профессионального цикла образовательной программы.

### Список литературы

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов. – М.: Юнити, 1998. – 1005 с.
2. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М.: Юнити-Дана, 2003. – 352 с.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: учебник для студентов вузов: – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 328 с. ISBN 978-5-238-01720-4.
4. Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel.: М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. 448 с.
5. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование: учеб. пособ. для студ. высш. учеб. заведений / Ю.Н. Павловский, Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский. – М.: Изд. цент «Академия», 2008. – 236 с. ISBN 978-5-7695-3967-1.
6. Строгалев В.П., Толкачева И.Ю. Имитационное моделирование: учеб. пособ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 280 с. ISBN 978-5-7038-3021-5.
7. Ханк Д.Э., Уичерн Д.У., Райтс А.Дж. Бизнес-прогнозирование, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 656 с.
8. Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 344 с. ISBN 5-279-01955-0.

### Рецензенты:

Стружанов В.В., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Института машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург;

Титов С.С., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и техническая графика» Уральской государственной архитектурно-художественной академии, г. Екатеринбург.