

ИНТЕГРАЦИЯ РАЦИОНАЛЬНОГО И ИНТУИТИВНОГО ОПЫТА КАК СРЕДСТВО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПОНИМАНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПО МАТЕМАТИКЕ

Брейтигам Э.К.

ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный педагогический университет», г. Барнаул, Россия (656031, г. Барнаул, ул. Молодёжная, д.55), e-mail: bekle@yandex.ru

В статье автором обоснована актуальность достижения обучающимися понимания при усвоении учебного (математического) материала. Выделена специфика обеспечения понимания в предметной области «математика» и, опираясь на эту специфику, обоснована целесообразность использования интеграции рационального и интуитивного опыта обучающихся для преодоления формализма при усвоении математики и обеспечения условий для достижения обучающимися понимания учебного материала. Приведены условия (использование различных форм представления фактов, формирование образа изучаемого понятия, применение эмпирического опыта, учёт индивидуальных стилей мышления обучающихся), позволяющие обеспечить достижение всех типов понимания: понимание-знание, понимание-интерпретация и понимание-постижение для повышения качества математического образования. Описаны средства и методы, обеспечивающие достижение обучающимися понимания учебного математического материала на основе интеграции их рационального и интуитивного опыта.

Ключевые слова: математическое образование; понимание; рациональный и интуитивный опыт; типы понимания: когнитивный (понимание-знание), герменевтический (понимание-интерпретация), экзистенциальный (понимание-постижение)

INTEGRATION OF RATIONAL AND INTUITIVE EXPERIENCE AS A MEANS TO ENSURE THE COURSE MATERIAL COMPREHENSION IN MATHEMATICS

Breytigam E.K.

"Altai State Pedagogical University", Barnaul, Russia (656031, Barnaul, ul. Youth d.55), e-mail: bekle@yandex.ru

In the article the author of the urgency of reaching an understanding learners during learning (mathematical) of the material. Allocated to provide an understanding of the specifics in the subject area "mathematics" and, based on this specificity, the expediency of using the integration of rational and intuitive experience of the learners to overcome formalism in mastering mathematics and to ensure the achievement of learners understanding of educational material. The conditions (use of different forms of representation of fact, the formation of the image of the studied concepts, the use of empirical evidence, based on individual thinking styles of students), allowing to achieve all types of understanding: understanding, knowledge, interpretation and understanding of comprehension to improve the quality of mathematics education. The means and methods to ensure the achievement of learners understanding of mathematical training material based on the integration of their rational and intuitive experience.

Keywords: mathematics education; understanding; rational and intuitive experience; types of understanding: cognitive (knowledge, understanding), hermeneutics (interpretation-understanding), existential (understanding, comprehension)

Преодоление формализма в процессе обучения и усвоения нового знания является одной из ключевых задач системы образования. Решение этой проблемы возможно, на наш взгляд, лишь через активизацию мыслительной деятельности обучающихся, привлечение их личного опыта и достижение ими понимания учебного материала.

Существуют различные трактовки категории «понимание». Исследуя понимание как педагогическое явление, мы будем рассматривать его как процесс и результат раскрытия, постижения основной идеи, сущности явления, события, установление взаимосвязей с уже имеющимися знаниями, включение нового содержания в смысловую сферу личности; как

процесс, сопровождающий усвоение учебного материала обучающимися, но не совпадающий с ним.

Многочисленными исследованиями доказано, что именно высокое качество образования подрастающего поколения в области естественных фундаментальных наук и математики обеспечивает уровень жизни, экономическую и военную безопасность страны [10, 11]. Осознание этого вполне оправдывает наше внимание к организации «понимающего усвоения» математики [1, 2].

В то же время на практике у подрастающего поколения наблюдается снижение интереса и слабая мотивация к изучению фундаментальных наук и математики как в школе, так и в ВУЗе. Во многом, это связано с нарастанием формализма в их преподавании в ответ на тестовую оценку результатов обучения (системы ОГЭ и ЕГЭ, письменный экзамен в ВУЗе или то же тестирование), большим числом формальных показателей оценки деятельности образовательных организаций. Эти дисциплины всегда считались «трудными» для усвоения, требовали целенаправленной, систематической работы мышления, направленной на преодоление возникающих проблем в их понимании и применении.

В предыдущих работах [3] нами уже проанализированы выделенные психологами [5] типы понимания: *когнитивный (понимание-знание), герменевтический (понимание-интерпретация) и экзистенциальный (понимание-постижение) с педагогической точки зрения, а также условия для обеспечения их достижения обучающимися.*

В этой статье хотелось бы подробнее остановиться на *интеграции рационального, логически обоснованного и интуитивного опыта* в процессе обучения математике как средстве обеспечения различных типов *понимания* обучающимися. Разработка методики обучения естественнонаучным дисциплинам и математике в школе и ВУЗе, направленная на понимание, позволяет преодолеть формализм в усвоении учебного материала, способствует развитию личности обучающегося за счёт использования резервов «двойственности психологических механизмов человеческого мышления» [6, с.71].

Отметим, что знания можно получить «со стороны»: из книг, из средств массовой информации, от другого человека, а опыт необходимо приобрести (испытать) самому. Кроме того, опыт имеет символично-смысловую природу (А.Ф. Лосев), что особенно важно при изучении математики.

Обратившись к вопросу достижения обучающимися понимания в предметной области «математика», выделим специфику обеспечения в ней понимания и целесообразность привлечения как рационального (логического), так и интуитивного компонентов мышления.

Эта специфика обусловлена:

а) содержанием процесса понимания абстрактного материала (виды абстракции – идеализации, отождествления и др.) – постижение смысла, сущностных связей, формирование образа;

б) необходимостью владения формальным специфическим символьным языком математики и логической структурой предмета (методы обоснования, доказательства, выводов; необходимость интерпретации);

в) проникновением в *сущность* факта (предмета или явления), раскрытие его внутреннего содержания, обнаруживающегося во внешних формах существования факта; с пониманием идей и методов, которые надёжно «спрятаны» в формулах, алгоритмах, приёмах и формальных методах доказательства;

г) знанием и использованием метода математического моделирования как основного для развития науки математики, для её применения и усвоения, на котором зиждется целостность математического знания;

д) необходимостью *последовательного и непрерывного* изучения содержания, так как в предметной области «математика» всё взаимосвязано и без включения предыдущего материала в личностный опыт невозможно овладение последующими разделами (в частности, без знания правил раскрытия скобок невозможно овладеть дифференциальным исчислением).

Анализ выделенной специфики математического знания показывает, что важную роль в овладении математикой приобретает требование использования различных форм представления фактов, явлений, понятий; формирование образа изучаемого предмета или явления, использование эмпирического опыта (например, для возникновения ассоциаций между абстрактными и реальными объектами). Его выполнение позволяет создать условия для реализации *когнитивного типа понимания*. Это важно в связи с необходимостью понимания формального специфического символьного языка математики, применения метода математического моделирования и понимания абстрактного содержания математического знания. Когнитивный тип понимания (понимание - знание) способствует осмыслению информации, связан с освоением знаковой и объективно-реальной ситуации (содержание и объём понятия, например). В философской и педагогической литературе этот тип понимания называется «рационалистическим» [4, с .148] или понимание-объяснение [7, с.276].

В процессе развития когнитивного типа понимания, например, математического понятия, обучающийся опирается на данное словесное определение, на весь свой прошлый опыт. Именно при введении математического понятия практически обязательным является требование одновременного введения словесной формулировки определения, его

формализованной символьной записи и иллюстрации (схема, рисунок, модель). Сошлёмся ещё на В.А. Успенского, который писал: «<...> если математическое понятие имеет сущность, отдельную от воплощения в словесном определении или формуле, то можно надеяться на лучшее понимание этой сущности путём демонстрации различных её проявлений (а не только формулировки)» [9, с.462-463].

В качестве примеров можно привести понятия «точка экстремума»; «точка максимума», «максимум (минимум) функции», «наибольшее (наименьшее) значение функции». Их введение, помимо определения в вербальной и символьной форме, обязательно должно сопровождаться графической иллюстрацией (геометрическое представление различных ситуаций для разрывных и непрерывных функций, для дифференцируемых и не дифференцируемых в некоторых точках функций). Различение перечисленных выше понятий важно для их изучения и последующего применения при исследовании функций, построении графиков функций, решении задач оптимизации. Для этого обучающимся требуется не только сравнение определений, но и анализ достаточного числа примеров, неформальных словесных пояснений, графических иллюстраций, формирование внутреннего образа, ассоциаций (например, максимум – «шапочка, бугорок», минимум – «ямка»).

Использование различных форм представления информации уже на этапе введения нового материала способствует переходу от понимания-знания к *пониманию-интерпретации*. Следует отметить, что термин «интерпретация» используется здесь как в широком смысле – истолкование, объяснение, перевод на более понятный язык, так и в специальном смысле – построение математических моделей для абстрактных понятий и систем, приписывание содержательного смысла формулам и символам, а также «установление соответствия между знанием и реальной действительностью» [7, с.276]. Отметим также, что интерпретация позволяет достичь обучающимся глубины и отчётливости понимания.

На следующих этапах формирования математического понятия целесообразно сосредоточить усилия преподавателя и обучающихся на овладение *смыслом* изучаемых понятий, их свойств (теорем, утверждений). Основное внимание при этом уделяется раскрытию смыслов математических символов и формул, построению геометрических иллюстраций к теоремам. Тем самым создаются дополнительные условия для возникновения у обучающихся *понимания-интерпретации*. Оно достигается в процессе не только использования усвоенных правил и алгоритмов, но и привлечения эмпирического опыта, ассоциаций, интуиции; учёта преподавателем индивидуального стиля мышления обучающихся. Не случайно опытные преподаватели используют различные мнемонические

правила, стихи, нацеленные на возникновение ассоциаций и помогающие обучающимся запоминать и применять правила и формулы.

Важность учёта индивидуального стиля мышления проиллюстрируем нашим опытом изучения в 10 классе раздела «Тригонометрия». Рассматривая вопросы решения тригонометрических уравнений, мы предлагали учащимся иллюстрацию выбора решений, как с помощью единичной окружности, так и с помощью графиков функций синус, косинус и тангенс. Практика показывает, что в абсолютном большинстве случаев учащиеся в классе делятся примерно на две равные группы, учащиеся одной из которых в последующем при интерпретации решений используют единичную окружность, а учащиеся другой пользуются графиками функций. Аналогичная картина наблюдалась нами и при выборе метода решения тригонометрических неравенств в классах с углубленным изучением математики. Приведённый пример, на наш взгляд, подтверждает, что выбор интерпретации зависит от индивидуальных особенностей обучающегося, его личного образовательного опыта и предпочтения им той формы представления, которая «понятнее» лично ему.

Отметим, что именно о *герменевтическом типе понимания* идёт речь, когда первокурсники сами представляют графические иллюстрации к различным конкретным случаям определения предела функции в точке ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где a, b – либо числа, либо символы $\pm \infty$ - 16 рисунков), отмечая на этих рисунках ε –окрестности точек на оси Оу и δ -окрестности точек на оси Ох. Выполнив такую работу, они, обычно, говорят: «Наконец-то я понял, что такое предел функции!». Как показывает практика, в этом случае у большинства студентов речь идёт лишь о понимании-интерпретации, так как понимание сущности понятия (идеи локальной близости), понимания предельного перехода как ведущего метода математического анализа на этом этапе находится лишь в зачаточном состоянии. Важнейшим инструментом для дальнейшего углубления понимания служит специально организованный диалог [3].

Таким образом, при реализации герменевтического типа понимания происходит дальнейшее развитие когнитивного типа понимания (обогащение знанием, его углубление) и пропедевтика экзистенциального типа понимания.

Результатом *экзистенциального типа понимания* является *понимание-постижение* ситуации, понятия, факта, которое связано с пониманием сути, скрытого смысла объекта или явления, с результатом творческих усилий, глубокой интуиции, озарения.

Термин «постижение» имеет большое число толкований. Во многих источниках, включая философские и психологические словари, категории «постижение» и «понимание» отождествляются, при этом *понимание* рассматривается как процесс *постижения* и

порождения смыслов (А.А. Брудный, М. Вебер, В. Дильтей, В.П. Зинченко и др.). Однако мы разделяем позицию тех исследователей (психологов и философов), которые рассматривают постижение как глубинное, сущностное познание, как высшую ступень понимания, результат синтеза накопленных знаний и опыта в новую целостную картину мира [5, 6].

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении постижения и его характеристиках с точки зрения психологии, на которые указывает В.В. Знаков. Рассматривая постижение как тип понимания, он выделяет две характеристики: первая состоит в том, что постижение направлено не на простое, а на сложное, то есть на те явления и объекты, которые требуют для своего понимания «незаурядных усилий» [6, с. 74]. При этом понимание связано с проникновением в *сущность* явления, в его внутренние свойства и взаимосвязи. Такое понимание не может быть привнесено извне, через объяснение преподавателя или товарища, оно опирается на глубокую мыслительную деятельность обучающегося, *его интуицию и творческие усилия*.

Указанная выше специфика обеспечения понимания в предметной области «математика», анализ педагогической литературы и многолетний опыт работы позволяет нам сделать вывод о том, что усвоение математических фактов и понятий представляет значительную трудность для большинства обучающихся, что и обуславливает целесообразность создания в процессе обучения условий для понимания-постижения.

Возникновение такого типа понимания тесно связано со стремлением обучающегося «перевести» полученную информацию на свой «внутренний язык», найти представление с помощью известных ранее понятий, фактов и явлений. Задача преподавателя в этом случае состоит в подсказке возможных вариантов последующего самостоятельного выбора, чтобы создать условия обучающимся для перехода от герменевтического понимания (*понимание-интерпретация*) к экзистенциальному типу понимания (*понимание-постижение*). Практика показывает, что в образовательном процессе, в частности, в предметной области «математика» стремление к такому пониманию-постижению у обучающегося проявляется вопросами в форме «Почему?», «На основании чего это утверждается?», «Из чего это следует?», которые он начинает задавать преподавателю и *себе*. Именно в результате осмысления им полученных объяснений, последующих размышлений, собственных ответов происходит преодоление возникающих трудностей в усвоении учебного материала, привлекаются собственные творческие силы для решения задач повышенного уровня, самостоятельный поиск таких задач. Создание подобной обстановки в учебной аудитории способствует возникновению личностных изменений, развитию мыслительной деятельности, выработке интуиции.

Ко второй характеристике категории «постижение» В.В. Знаков относит «такое *схватывание* целого, части которого мы по тем или иным причинам не можем познать и детально описать» [6, с. 74]. Далее он пишет: «<...> необходимость в постижении возникает тогда, когда невозможно познание, когда у нас нет возможности описать понимаемое с помощью логически обоснованных знаний» [6, с. 74].

Отметим, что история математики полна такими примерами. Сюда относится развитие понятия «иррациональное число» (научная теория действительных чисел появилась лишь в XIX веке), а также понятий «предел функции», «бесконечно малая величина» и др. Об огромной роли интуиции, ассоциативных связей в математических исследованиях говорили многие ученые-математики. Нередко математики, вводя формальное определение нового понятия, приводят затем его эвристическое описание и далее переходят к доказательству свойств [9]. Использование информационно-коммуникационных технологий для визуализации абстрактных математических объектов и процессов (например, предельного перехода, линеаризации) значительно помогает обучающимся выявлять в них сущностные связи, что подтверждается современными педагогическими исследованиями.

Представляется интересным в этом плане процесс усвоения студентами понятий «счётное множество», «мощность континуума», «континуум». Наш опыт показывает, что для организации усвоения этих понятий необходимо привлечение эмпирического опыта студентов, примеров эвристического описания, использование методов доказательства соответствующих теорем и их последующее применение для решения задач. Вообще, тема «Мощность множества», которая изучается студентами в разделе «Теория функций действительной переменной», противоречит логике дискретного, всему их предыдущему рациональному математическому опыту, поэтому здесь важно привлечение эвристических соображений, интуиции.

О понимании-постижении можно говорить в том случае, когда в процессе исследовательской работы студент может выделить, например, в описании исследуемого явления ситуацию, позволяющую ему догадаться или правильно выбрать математический метод её изучения. Способствуют этому самостоятельное построение блок-схем темы или раздела учебной дисциплины, где выделены основные понятия и факты темы (раздела), отражены связи между ними; установление основных методов получения новых знаний при изучении раздела и основных способов решения задач. В результате, *понимание-постижение* позволяет обучающемуся строить математическую модель изучаемой ситуации, выбирать оптимальные способы применения изученного материала при решении практических задач, выполнять самостоятельное исследование.

Таким образом, интеграция рационального и интуитивного опыта обучающихся способствует преодолению трудностей при понимании сложного учебного материала, так как дает возможность обучающемуся установить взаимосвязь формально-логического определения математического понятия и его смысла как предметного (геометрического, физического и др.), так и содержательного (идея, история возникновения, место в системе математического знания, ассоциации на уровне интуиции). Интеграция рационального и интуитивного опыта, использование разнообразных форм и видов представления информации создают новые возможности для интерпретации и создания внутреннего образа нового факта, понятия. Наконец, появление целостного представления об изучаемом материале возможно лишь при выявлении в материале как формально-логических структурных и функциональных связей, так и возникших ассоциаций, эвристических описаний. Все это способствует преодолению поверхностного и формального усвоения учебного материала и служит важнейшим условием, при котором обучение развивает смысловую сферу личности.

В процессе понимания тесно переплетены целостность и системность содержания и его знакового представления, значения и смыслы понятий, интерпретация используемой знаково-символической системы, формируемые образы явлений и предметов, ассоциативные связи и эмпирический опыт.

Российская система математического образования традиционно была направлена на развитие мышления, творческих способностей личности, хотелось бы сохранить и развить эту традицию.

Список литературы

1. Брейтигам Э.К. Новые образовательные тенденции в обеспечении качества понимающего усвоения математики // Э.К. Брейтигам, И.В. Кисельников. – Человек и образование, 2010, №2, с.78-81.
2. Брейтигам Э.К. Достижение понимания, проектирование и реализация процессного подхода к обеспечению качества личностно развивающего обучения: Монография [Текст] // Э.К. Брейтигам, И.В. Кисельников – Барнаул, Изд-во АлтГПА, 2011. – 160 с.
3. Брейтигам Э.К. Уровни понимания учебного материала и условия их достижения обучаемыми в образовательном процессе. - Современные проблемы науки и образования // 2013.- №2. - Режим доступа: <http://www.science-education.ru/108-8985>.
4. Загадка человеческого понимания / Под общ. ред. А.А. Яковлева; Сост. В.П. Филатов. – М.: Политиздат, 1991.

5. Знаков В.В. Психология понимания: Проблемы и перспективы [Текст] – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2005. – 448 с.
6. Знаков В.В. Экзистенциальный опыт и постижение как методологические проблемы психологии понимания // Человек. Сообщество. Управление. -2014. - №3. - С. 67 - 82 .
7. Лященко Е.И. Герменевтические аспекты проблемы понимания математического (учебного) текста в высшей школе //Е.И. Лященко, О.А.Сотникова. – Казанская Наука. Педагогические науки. -2011.- №8. - С.272-278
8. Сериков В.В. Личностно развивающее образование: мифы и реальность [Текст] // Педагогика. – 2007. - № 10. – С. 3-12.
9. Успенский В.А. Апология математики: [сборник статей] / Владимир Андреевич Успенский [Текст]. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2009. – 554 с.
10. Чошанов М.А. Математика – Российский бренд. Как его сохранить? [Текст] // Математика в школе. -2013. – №4. – С. 3- -8 (Часть I)
11. Чошанов М.А. Математика – Российский бренд. Как его сохранить? [Текст] // Математика в школе. – 2013.– №5- С.3-9 (Часть II)

Рецензенты:

Веряев А.А., д.п.н., профессор, профессор кафедры информационных технологий ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный педагогический университет», г. Барнаул;

Шкерина Л.В., д.п.н., профессор, заведующая кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике в ВУЗе института математики, физики, информатики ФГБОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический университет», им. В.П. Астафьева», г. Красноярск.