

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВОЗДУШНОМ ЗАЗОРЕ НАВЕСНЫХ ФАСАДОВ ЗДАНИЙ

Косолапов Е.А., Федотов А.Б., Машенков А.Н.

ФГБ ОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», Нижний Новгород, Россия (603950, Н.Новгород, ул. Минина, 24), E-mail: kosolap2005@rambler.ru

В работе сравниваются различные математические модели одномерной свободной конвекции в воздушном зазоре навесных фасадов зданий. Основой обеих моделей является уравнение Навье – Стокса в различных вариантах приближения по методу Буссинеска. Вариативным параметром для моделей является отношение внешнего и внутреннего тепловых потоков. Горизонтальные рассечки и воздушные зазоры (русты) между облицовочными панелями не учитываются. Рассчитанные по обеим методикам распределения скорости, температуры и давления внутри воздушного зазора в зависимости от плотности поперечных тепловых потоков тестируются на взаимное соответствие. Показано, что разность двух решений для всех рассчитанных параметров стремится к нулю при устремлении к единице отношения внешнего и внутреннего тепловых потоков. Доказано, что варьирование граничных условий на нижнем торце конвекционного слоя не нарушает эквивалентность моделей. Полученные результаты могут быть обобщены для широкого круга одномерных конвекционных задач.

Ключевые слова: одномерная конвекция, приближение Буссинеска, тепловые потоки.

ASIMPTOTIC EQUIVALENCE OF TWO MATHEMATICAL MODELS OF NATURAL CONVECTION IN THE AIR GAP HINDED FACADES OF BUILDINGS

Kosolapov E.A., Fedotov A.B., Mashenkov A.N.

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia (603950, Nizhny Novgorod, Minin street, 24), e-mail: kosolap2005@rambler.ru

In the paper compares the different mathematical models of one-dimensional free convection in the air gap curtain facades. The basis of both models is the Navier – Stokes equations in different versions according to the method of approximation Boussinesq. Variable parameter model is the ratio of the internal and external heat fluxes. Horizontal crosscuts and clearances (rusty) between the facing panels are not considered. Calculated by both methods of distribution of velocity, temperature and pressure inside the air gap, depending on the density of the transverse heat flows are tested for mutual consistency. It is shown that the difference of two solutions for all calculated parameters tends to zero as the aspiration to unity ratio of internal and external heat fluxes. It is proved that the variation of the boundary conditions on the bottom of the convection layer does not violate the equivalence of models. The results can be generalized to a wide range of one-dimensional convection problems.

Keywords: one-dimensional convection, Boussinesq approximation, heat flow.

В работах [2, 3] и [1, 4] рассмотрены две различные математические модели для описания свободной конвекции в воздушном зазоре навесных вентилируемых фасадов (НВФ). Хотя они обе основаны на приближении Буссинеска, варианты которого подробно изложены в [5], тем не менее в основе их лежат разные дифференциальные уравнения. Кроме того, они основаны на различных дополнительных допущениях.

В обеих моделях рассматривается плоский, вертикальный слой воздуха заданной ширины и высоты, соответствующим ширине воздушного зазора и высоте здания. Ось z – направлена вверх, а ось x – горизонтально поперек зазора (рис.1).

Плотности тепловых потоков через стенки зазора q_1 и q_2 (рис.1), а отношение их проекций на ось x : $\varepsilon = \frac{q_2}{q_1}$.

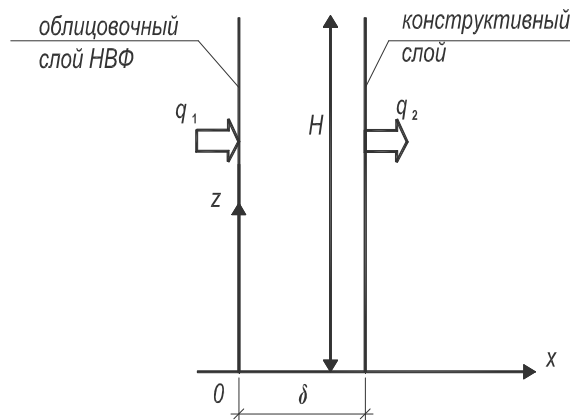


Рис. 1. К постановке задачи для плоского слоя.

В обеих моделях предполагается, что скорость имеет только вертикальную составляющую и зависит только от координаты x .

Избыточная температура T , по сравнению с температурой внизу зазора, в первой модели [2, 3] зависит только от x , а во второй модели [1, 4] от x и z .

Избыточное давление p , по сравнению с барометрическим атмосферным, в обеих моделях зависит только от z .

При обезразмеривании основных величин так, как принято в работе [3], распределение скорости по первой модели имеет вид [1, 2]:

$$v(x) = \frac{x}{12} (2x^2 - 3x + 1), \quad (1)$$

а распределение температуры:

$$T(x) = -x + \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Распределение скорости по второй модели [1, 4] имеет следующий вид [4]:

$$v(x) = \frac{1}{4k^3} [chkx \sin kx - shkx \cos kx - 2C_1 shkx \sin kx + C_2 (chkx \sin kx + shkx \cos kx)], \quad (3)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяются по формулам [4]:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{chk(shk - \varepsilon \sin k) + \cos k(\sin k - \varepsilon shk)}{sh^2k - \sin^2 k} \\ C_2 = \frac{sh^2k \cos^2 k + ch^2k \sin^2 k - 2\varepsilon shk \sin k}{sh^2k - \sin^2 k} \end{cases}, \quad (4)$$

Трансцендентное уравнение для определения k , входящего в формулы (3) – (4), имеет вид [4]:

$$\frac{4k^6}{R} = C_1(chk \sin k + shk \cos k) - shk \sin k + C_2(1 - chk \cos k), \quad (5)$$

где R – число Релея. Распределение температуры для второй модели имеет вид [4]:

$$T(x, z) = \frac{2k^4}{R}(2z - 1) - \frac{1}{2k}[(C_2 + 1)shkx \cos kx + (1 - C_2)chkx \sin kx - 2C_1chkx \cos kx], \quad (6)$$

Сравнивая формулу (1) с формулой (3) и формулу (2) с (6) трудно предположить, что в некотором предельном случае они совпадут.

Отметим также разницу в дополнительных допущениях обеих моделей. В первой модели предполагается, что расход поперек воздушного зазора равен нулю [3]:

$$\int_0^1 v(x) dx = 0, \quad (7)$$

Условие (7) представляется естественным для свободной конвекции в зазоре с горизонтальными рассечками.

Во второй модели требования (7) – нет. Дополнительными допущениями этой модели является отсутствие прогрева слоя воздуха в самом низу зазора [1, 4]:

$$\int_0^1 T(x, 0) dx = 0, \quad (8)$$

Основанием для гипотезы об эквивалентности этих двух моделей при $\varepsilon \rightarrow 1$ могут являться графики скорости и температуры, приведенные в работе [4] для $\varepsilon = 0,8$. Они довольно близки к графикам функций (1) и (2) – соответственно. Для того чтобы найти выражения для скорости и температуры при $\varepsilon = 1$, сначала необходимо найти k , соответствующее значению $\varepsilon = 1$.

Для данного значения $\varepsilon = 1$ формулы для коэффициентов C_1 и C_2 (4), после преобразований примут вид:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{chk - \cos k}{shk + \sin k}, \\ C_2 = \frac{shk - \sin k}{shk + \sin k}. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда уравнение для определения k (5), после преобразований, можно записать в виде:

$$F(k) = \frac{4k^6}{R}(shk + \sin k) = 0. \quad (10)$$

Единственным решением этого уравнения в области действительных чисел является $k = 0$. Это же подтверждается графиком левой части уравнения (10), приведенным на рис. 2. Таким образом, при $\varepsilon = 1 \Rightarrow k = 0$ для любых чисел Релея R .

При $k = 0$ невозможно непосредственно получить значения C_1 и C_2 , а также вид функций скорости и температуры, т. к. выражения (9), (3), (6) приводят к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Тем не менее имеется возможность рассчитать скорость при малых k по формуле (3), где координаты C_1 и C_2 находятся по формулам (9).

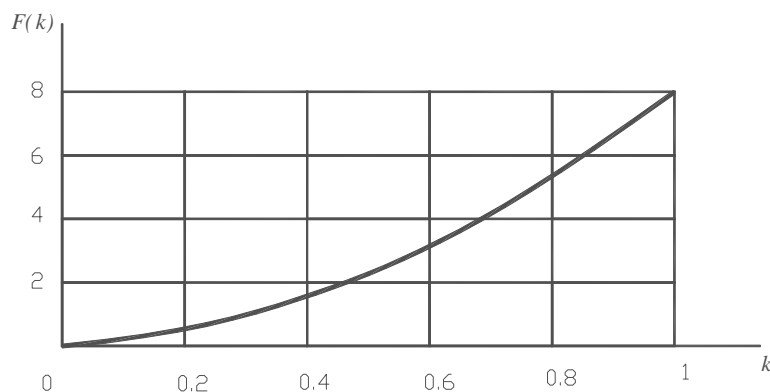


Рис. 2. График левой части уравнения (10)

На рис. 3 приведены графики распределения скорости. Из этого рисунка видно, что при $k = 0,01$ графики скорости, построенные по зависимостям (1) и (3), совпадают с точностью до графического разрешения. Это еще раз подчёркивает правомерность выдвинутой гипотезы о совпадении математической модели [1, 4] с моделью [2, 3] при $\varepsilon \rightarrow 1$.

После преобразований формулы (3) при $\varepsilon = 1$ получим следующее выражение для скорости:

$$v(x) = \frac{1}{2k^3(shk + \sin k)} [(\cos k - chk)shkx \sin kx + shkchkx \sin kx - \sin kshkx \cos kx], \quad (11)$$

Входящие в формулу (11) выражения необходимо разложить в ряд Тейлора для малых k , а значит и kx , т. к. $0 \leq x \leq 1$. Разложение тригонометрических и гиперболических функций по малому параметру k дает:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!} = k - \frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{5!}k^5 - \dots \\ \cos k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{4}k^4 - \dots \\ shk = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!} = k + \frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{5!}k^5 + \dots \\ chk = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{4!}k^4 + \dots \end{array} \right. , \quad (12)$$

Получим разложение в ряд Тейлора для комбинаций этих функций, которые входят в выражение для $v(x)$ (11) и войдут для $T(x)$ (6).

$$shk + \sin k = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (13)$$

где $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2; n = 0, 2, 4, \dots \\ 0; n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$,

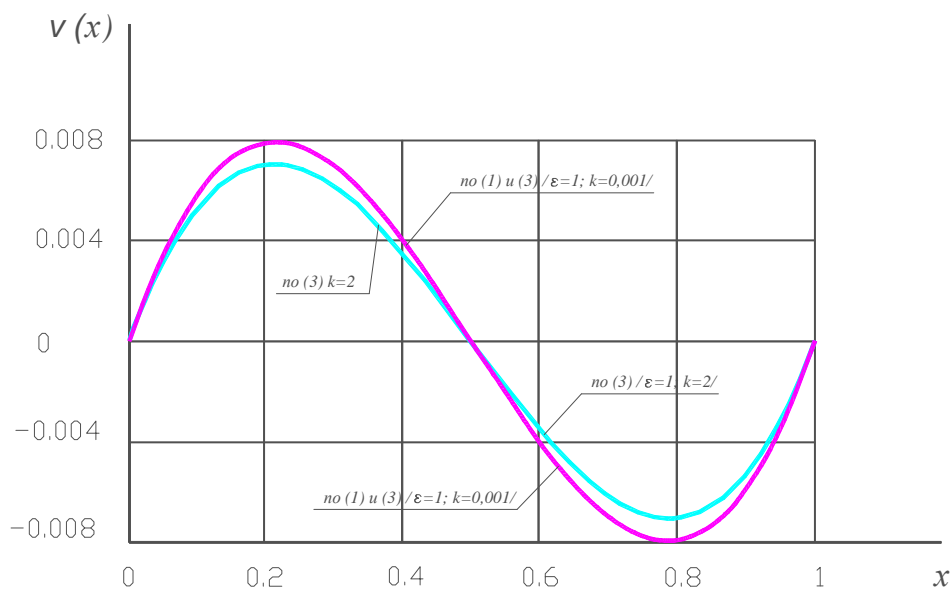


Рис. 3. Распределение скорости поперек воздушного зазора, рассчитанные по формулам (1) и (3) при $\varepsilon = 1$ и различных k .

Если в (13) обозначить $n = 2l$; $l = 0, 1, 2, 3, \dots$; то формула (13) примет вид:

$$shk + \sin k = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^{4l+1}}{(4l+1)!} = 2k + 2 \frac{k^5}{5!} + \dots, \quad (14)$$

Аналогично, получим следующие выражения:

$$shk + \sin k = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^{4l+3}}{(4l+3)!} = \frac{k^3}{3} + \dots, \quad (15)$$

$$chk - \cos k = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^{4l+2}}{(4l+2)!} = k^2 + \dots, \quad (16)$$

Для произведений гиперболических и тригонометрических функций, с учетом (12), получим следующие выражения:

$$\begin{cases} shkx \sin kx = (kx)^2 + \dots \\ shkx \cos kx = kx - \frac{(kx)^3}{3} + \dots \\ chkx \sin kx = kx + \frac{(kx)^3}{3} + \dots \\ chkx \cos kx = 1 + \dots \end{cases}, \quad (17)$$

Используя формулы (12), (16), (17), выражение для скорости (11) примет вид:

$$v(x) = \frac{1}{4k^4} \left\{ -k^2 (kx)^2 + \left(k + \frac{k^3}{6} \right) \left[kx + \frac{(kx)^3}{3} \right] - \left(k - \frac{k^3}{6} \right) \left[kx - \frac{(kx)^3}{3} \right] \right\}, \quad (18)$$

Окончательно, из (18) получаем:

$$v(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, \quad (19)$$

Выражение (19) полностью совпадает с выражением (1).

Далее рассмотрим выражение для температуры (6), которое при $\varepsilon = 1$ примет вид:

$$T(x) = \frac{1}{2k(\operatorname{sh}k + \sin k)} [(chk - \cos k)chkx \cos kx - shkshkx \cos kx - \sin kchkx \sin kx], \quad (20)$$

С учетом разложений гиперболических и тригонометрических функций в ряд Тейлора (12) – (17), можно записать

$$T(x) = \frac{1}{2k^2} \left\{ k^2 - \left(k + \frac{k^3}{6} \right) \left[kx - \frac{(kx)^3}{3} \right] - \left(k - \frac{k^3}{6} \right) \left[kx + \frac{(kx)^3}{3} \right] \right\}, \quad (21)$$

Или окончательно, при $k \rightarrow 0$:

$$T(x) = \frac{1}{2} - x, \quad (22)$$

Видно, что формула (22) полностью совпадает с формулой (2).

Таким образом, распределение скорости и температуры (3) и (6) переходят в распределение (1) и (2) при $\varepsilon = 1$. Отметим, что $\varepsilon = 1$ соответствует случаю, когда тепловой поток через облицовочный слой НВФ равен по величине и направлению тепловому потоку через конструктивный слой. В этом случае, в частности, получаем линейное распределение температуры поперек воздушного зазора, а распределение скорости соответствует нулевому расходу, т.е. в зазоре должны быть как восходящие, так и нисходящие потоки воздуха.

В заключение заметим, что плотность теплового потока q_1 определяется температурами атмосферы и внутри зазора, термическим сопротивлением облицовки и радиационным тепловым потоком. Плотность теплового потока q_2 определяется температурами внутри зазора и здания, а также термическим сопротивлением конструктивного слоя.

Математическая модель, принятая в работах [1, 4], является более общей. В частном случае ($q_1 = q_2$), она переходит в математическую модель работ [2, 3].

Список литературы

1. Александровский С.В. Теплообмен в вентилируемой воздушной прослойке наружного ограждения здания /С.В. Александровский, В.Б. Максимов // Теплоизоляция зданий в.: сборник трудов института. – М.: НИИСФ Госстроя СССР, 1986. – С.110–119.
2. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 184с.
3. Косолапов Е.А. Аналитическое решение уравнений Буссинеска для свободной конвекции в воздушном зазоре навесных фасадов зданий / Е.А. Косолапов, А.Н. Машенков, Е.В. Чебурканова // Энергетические установки и теплотехника. – Н.Новгород, 2008. – С.115-124. – (Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева Т. 69).

4. Машенков А.Н. Свободная конвекция в воздушном зазоре навесных фасадов зданий с разными тепловыми потоками через границы / А.Н. Машенков, Е.А. Косолапов, Е.В. Чебурканова // Жилищное строительство. – 2009. – Т.9. – С.27-31.
5. Полежаев В.И. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Буне, Н.А. Вырезуб и др. – М.: Наука, 1987. – 272 с.

Рецензенты:

Зуев В.А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Кораблестроение и авиационная техника» НГТУ им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород;

Грамузов Е.М., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Аэро-гидродинамика, прочность машин и сопротивление материалов» НГТУ им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород.