УДК 534.01

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИЗ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Сафина Г.Ф.

ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет», Нефтекамский филиал, Нефтекамск, Россия (452680, Нефтекамск, ул. Трактовая, 1), e-mail: safinagf@mail.ru

Рассмотрены прямая и обратная спектральные задачи свободных колебаний механической системы из связанных маятников. Исследована прямая задача по определению частот колебаний системы из трех маятников с грузами, соединенных между собой пружинами. Получено частотное уравнение колебаний механической системы. Поставлены и решены обратные задачи диагностирования характеристик системы из связанных маятников по известным частотам ее свободных колебаний. Рассмотрены задачи диагностирования коэффициентов жесткостей пружин и масс грузов системы. Исследована единственность решения поставленных задач. Доказаны соответствующие теоремы. Получены аналитические формулы для коэффициентов жесткостей пружин. Предложены методы решения задач, использующие две и три частоты колебаний механической системы. Даны примеры решений прямой и обратной задач.

Ключевые слова: частотное уравнение, частоты колебаний, диагностирование характеристик.

DIAGNOSING OF CHARACTERISTICS OF MECHANICAL SYSTEM FROM THE CONNECTED PENDULUMS

Safina G.F.

[1]Bashkir State University, Neftekamsk branch, Neftekamsk, Russia (452680, Neftekamsk, Traktovaya St., 1), e-mail: safinagf@mail.ru

Direct and return spectral problems of free fluctuations of mechanical system from the connected pendulums are considered. The direct task of determination of frequencies of fluctuations of system from three pendulums with freights connected among themselves by springs is investigated. The frequency equation of fluctuations of mechanical system is received. The return tasks of diagnosing of characteristics of system from the connected pendulums on known frequencies of its free fluctuations are set and solved. Problems of diagnosing of coefficients of zhestkost of springs and mass of freights of system are considered. Uniqueness of the solution of objectives is investigated. The corresponding theorems are proved. Analytical formulas for coefficients of zhestkost of springs are received. Methods the solutions of tasks using two and three frequencies of fluctuations of mechanical system are proposed. Examples of solutions of direct and return tasks are given.

Keywords: frequency equation, frequencies of fluctuations, diagnosing of characteristics.

Механические системы, состоящие из связанных маятников, являются составной частью технических конструкций, находящих широкое применение в различных областях деятельности человека. Со временем в связи с изношенностью механической системы ее физические параметры могут менять свои значения. Поэтому определение характеристик механической системы важно для проверки надежности ее работы. Об этих характеристиках чаще всего можно судить после разборки устройства, но этот процесс может быть трудоемким, дорогостоящим и может привести к нарушению приработки деталей системы. Поэтому в настоящее время получило широкое развитие направление, возникшее на стыке теории механизмов с акустикой, решающее задачи безразборной диагностики технических конструкций [3, 4, 6 – 8, 10].

Свободные колебания механических систем, в том числе систем из связанных маятников, рассмотрены во многих трудах по теории колебаний, например, в работах [1, 2, 9]. Но в них рассматриваются прямые задачи по определению частот колебаний системы. В представленной работе поставлены, исследованы и решены обратные задачи – задачи диагностирования характеристик системы по известным частотам ее свободных колебаний.

1. Определение частот колебаний системы из связанных маятников

Рассмотрим механическую систему из трех связанных маятников, соединенных между собой пружинами (рисунок 1).

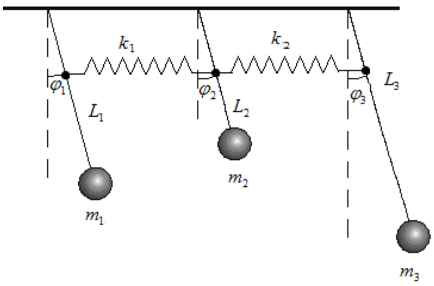

Рис.1. Механическая система из трех связанных маятников

Здесь: m_1, m_2, m_3 – массы грузов, L_1, L_2, L_3 – длины стержней, φ_1, φ_2, φ_3 – углы поворотов (обобщенные координаты), k_1, k_2 – жесткости соединяющих стержни пружин. На каждый из маятников действует момент силы тяжести. Пружины создают дополнительные моменты, величины которых зависят от разности угловых координат маятников.

Для вывода уравнений колебаний маятников используем основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси [9]:

$$M_{ir} + M_{iu} = J_i \varepsilon_i, \qquad (1)$$

где J_i – моменты инерции тел, ε_i – угловые ускорения тел, $M_i = -m_i g L_i \sin\varphi$ – моменты силы тяжести маятников ($i = 1,2,3$). Подставим значения моментов инерции тел, моментов сил тяжести в (1) и получим уравнения движения маятников:

$$\begin{cases} -m_1 g L_1 \sin\varphi_1 - k_1 a^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = m_1 L_1^2 \cdot \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2}; \\ -m_2 g L_2 \sin\varphi_2 - k_2 a^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - k_1 a^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = m_2 L_2^2 \cdot \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2}; \\ -m_3 g L_3 \sin\varphi_3 - k_2 a^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = m_3 L_3^2 \cdot \dfrac{d^2\varphi_3}{dt^2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Так как рассматриваются малые колебания маятников, поэтому считаем, что $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда с помощью преобразований последнюю систему приведем к виду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \dfrac{m_1 g L_1 + k_1 a^2}{m_1 L_1^2}\varphi_1 - \dfrac{k_1 a^2}{m_1 L_1^2}\varphi_2 = 0; \\
\dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} - \dfrac{k_1 a^2}{m_2 L_2^2}\varphi_1 + \dfrac{m_2 g L_2 + k_2 a^2 + k_1 a^2}{m_2 L_2^2}\varphi_2 - \dfrac{k_2 a^2}{m_2 L_2^2}\varphi_3 = 0\cdot; \\
\dfrac{d^2\varphi_3}{dt^2} - \dfrac{k_2 a^2}{m_3 L_3^2}\varphi_2 + \dfrac{m_3 g L_3 + k_2 a^2}{m_3 L_3^2}\varphi_3 = 0\cdot
\end{cases}
\tag{3}
$$

Учитывая, что механическая система совершает свободные колебания, принимаем решения системы уравнений (3) в виде [9]: $\varphi_i(t) = M_i \cos(\omega t + \theta)$ $(i = 1,2,3)$, где ω – частота, M_i – амплитуды колебаний. Подставляя $\varphi_i(t)$ в систему (3), получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
(-\omega^2 + \dfrac{m_1 g L_1 + k_1 a^2}{m_1 L_1^2})M_1 - \dfrac{k_1 a^2}{m_1 L_1^2}M_2 = 0; \\
-\dfrac{k_1 a^2}{m_2 L_2^2}M_1 + (-\omega^2 + \dfrac{m_2 g L_2 + k_2 a^2 + k_1 a^2}{m_2 L_2^2})M_2 - \dfrac{k_2 a^2}{m_2 L_2^2}M_3 = 0; \\
-\dfrac{k_2 a^2}{m_3 L_3^2}M_2 + (-\omega^2 + \dfrac{m_3 g L_3 + k_2 a^2 + k_2 a^2}{m_3 L_3^2})M_3 = 0.
\end{cases}
$$

Приравнивая определитель матрицы полученной системы к нулю, найдем уравнение:

$$
\begin{aligned}
&-\omega^6 + \frac{1}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 m_3 l_3^2}((m_1 g l_1 m_2 l_2^2 m_3 l_3^2 + m_1 l_1^2 k_1 a^2 m_3 l_3^2 + m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 m_3 g l_3 + \\
&+ m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 k_2 a^2 + k_1 a^2 m_2 l_2^2 m_3 l_3^2 + m_1 l_1^2 m_2 g l_2 m_3 l_3^2 + m_1 l_1^2 k_2 a^2 m_3 l_3^2)\omega^4) + \\
&+ \frac{1}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 m_3 l_3^2}((-m_1 l_1^2 m_2 g^2 l_2 m_3 l_3 - m_1 l_1^2 k_2 a^2 m_3 g l_3 - m_1 l_1^2 k_1 a^4 k_2 - \\
&- m_1 g l_1 k_2 a^2 m_3 l_3^2 - m_1 l_1^2 m_2 g l_2 k_2 a^2 - k_1 a^4 m_2 l_2^2 k^2 - m_1 l_1^2 k_1 a^2 m_3 g l_3 - \\
&- m_1 g^2 l_1 m_2 l_2 m_3 l_3^2 - k_1 a^2 m_2 g l_2 m_3 l_3^2 - m_1 g^2 l_1 m_2 l_2^2 m_3 l_3 - m_1 g l_1 m_2 l_2^2 k_2 a^2 - \\
&\quad - k_1 a^4 k_2 m_3 l_3^2 - m_1 g l_1 k_1 a^2 m_3 l_3^2 - k_1 a^2 m_2 l_2^2 m_3 g l_3)\omega^2) + \frac{1}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2 m_3 l_3^2} \times \\
&\quad \times (k_1 a^4 k_2 m_3 g l_3 + m_1 g l_1 k_1 a^4 k_2 + m_1 g^3 l_1 m_2 l_2 m_3 l_3 + m_1 g^2 l_1 k_1 a^2 m_3 l_3 + \\
&\quad + m_1 g^2 l_1 k_2 a^2 m_3 l_3 + m_1 g^2 l_1 m_2 l_2 k_2 a^2 + k_1 a^2 m_2 g^2 l_2 m_3 l_3 + k_1 a^4 m_2 g l_2 k_2) = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Уравнение (4) является частотным уравнением свободных колебаний механической системы из трех связанных маятников. Определение частот колебаний системы рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. Найти собственные частоты колебаний системы из трех связанных маятников, для которой известны параметры: $L_1 = 1{,}168\text{м}$, $L_2 = 0{,}556\text{ì}$, $L_3 = 0{,}824\text{ì}$, $m_1 = 0{,}25\text{кг}$, $m_2 = 0{,}21\text{кг}$, $m_3 = 0{,}27\text{кг}$, $a = 0{,}5\text{м}$, $k_1 = 1{,}5\text{Н/м}$, $k_2 = 1\text{Н/м}$.

Решение. Подставляя заданные параметры в частотное уравнение (4), получим:

$$\omega^6 - 50{,}3155\omega^4 + 741{,}0524\omega^2 - 3318{,}6399 = 0 .$$

Корни уравнения, найденные с помощью ЭВМ, следующие: $\pm 2{,}9910$, $\pm 3{,}6251$, $\pm 5{,}3130$. Значит, имеем частоты колебаний: $\omega_1 = 2{,}9910\ c^{-1}$, $\omega_2 = 3{,}6251\ c^{-1}$, $\omega_3 = 5{,}3130\ c^{-1}$.

2. Задача диагностирования характеристик системы из связанных маятников

Поставим к прямой задаче обратную – задачу диагностирования характеристик системы из связанных маятников по известным частотам ее колебаний. К диагностируемым характеристикам отнесем, например, жесткости соединяющих стержни пружин, массы грузов системы.

Исследуем вначале обратную задачу диагностирования жесткостей пружин. При решении прямой задачи было получено уравнение (4), которое преобразуем к виду:

$$\Delta(\omega) = f_1(\omega)k_1k_2 + f_2(\omega)k_1 + f_3(\omega)k_2 + f_4(\omega) = 0. \qquad (5)$$

Здесь:

$$f_1(\omega) = \frac{-m_1l_1^2a^4 - a^4m_3l_3^2 - a^4m_2l_2^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^2 + \frac{a^4m_3gl_3 + m_1gl_1a^4 + a^4m_2gl_2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2};$$

$$f_2(\omega) = \frac{a^2m_2l_2^2m_3l_3^2 + m_1l_1^2a^2m_3l_3^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^4 + \frac{m_1g^2l_1a^2m_3l_3 + a^2m_2g^2l_2m_3l_3}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2} +$$
$$+\frac{-a^2m_2gl_2m_3l_3^2 - a^2m_2l_2^2m_3gl_3 - m_1l_1^2a^2m_3gl_3 - m_1gl_1a^2m_3l_3^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^2;$$

$$f_3(\omega) = \frac{m_1l_1^2m_2l_2^2a^2 + m_1l_1^2a^2m_3l_3^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^4 + \frac{m_1g^2l_1a^2m_3l_3 + m_1g^2l_1m_2l_2a^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2} +$$
$$+\frac{-m_1gl_1a^2m_3l_3^2 - m_1l_1^2m_2gl_2a^2 - m_1l_1^2a^2m_3gl_3 - m_1gl_1m_2l_2^2a^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^2;$$

$$f_4(\omega) = -\omega^6 + \frac{m_1gl_1m_2l_2^2m_3l_3^2 + m_1l_1^2m_2gl_2m_3l_3^2 + m_1l_1^2m_2l_2^2m_3gl_3}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^4 +$$
$$+\frac{-m_1l_1^2m_2g^2l_2m_3l_3 - m_1g^2l_1m_2l_2^2m_3l_3 - m_1g^2l_1m_2l_2m_3l_3^2}{m_1l_1^2m_2l_2^2m_3l_3^2}\omega^2 + \frac{g^3}{l_1l_2l_3}$$

Исследуем вопрос о единственности решения поставленной обратной задачи [6]. Введем некоторые обозначения. Задачу с частотным уравнением (5) и жесткостями k_1 и k_2 связывающих пружин обозначим через L, а задачу с подобным частотным уравнением и массовыми параметрами, но с другими жесткостями k_1' и k_2', обозначим через L'. Частотное уравнение задачи L' имеет вид:

$$\Delta'(\omega) = f_1(\omega)k_1'k_2' + f_2(\omega)k_1' + f_3(\omega)k_2' + f_4(\omega) = 0. \qquad (6)$$

Покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Если собственные частоты задач L и L' с характеристическими определителями $\Delta(\omega)$ и $\Delta'(\omega)$ совпадают с учетом их кратностей, то $k_1 = k_1'$ и $k_2 = k_2'$.*

Доказательство. Заметим, что собственные частоты задачи L являются корнями целой функции [5] – частотного уравнения (5), а собственные частоты задачи L' – корнями уравнения (6). Причем функции $f_i(\omega)\,(i=1,2,3,4)$ не зависят от коэффициентов жесткостей пружин и образуют систему линейно независимых функций.

Поскольку функции $\Delta(\omega)$ и $\Delta'(\omega)$ являются целыми функциями от ω и не равны тождественно нулю, то получаем, что функции $\Delta(\omega)$ и $\Delta'(\omega)$ восстанавливаются по своим нулям с точностью до постоянного множителя Z. Значит, $\Delta(\omega)-Z\Delta'(\omega)\equiv 0$. Из линейной независимости функций $f_i(\omega)\,(i=1,2,3,4)$ и последнего равенства имеем: $\mathrm{Z}=1$. Значит, $k_1=k_1'$ и $k_2=k_2'$. Теорема доказана.

Рассмотрим метод нахождения жесткостей k_1 и k_2, связывающих грузы пружин по известным двум частотам колебаний механической системы. Если даны две собственные частоты ω_1 и ω_2, то уравнения (5) представляют собой систему алгебраических уравнений с двумя неизвестными k_1 и k_2:

$$\begin{cases} f_1(\omega_1)k_1k_2 + f_2(\omega_1)k_1 + f_3(\omega_1)k_2 + f_4(\omega_1) = 0; \\ f_1(\omega_2)k_1k_2 + f_2(\omega_2)k_1 + f_3(\omega_2)k_2 + f_4(\omega_2) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из системы уравнений (7) можно получить аналитические выражения для коэффициентов жесткостей пружин в виде:

$$k_1 = -\frac{f_4(\omega_1) - f_4(\omega_2) + k_2 f_3(\omega_1) - k_2 f_3(\omega_2)}{k_2 f_1(\omega_1) - k_2 f_1(\omega_2) + f_2(\omega_1) - f_2(\omega_2)};$$

$$k_2 = \frac{-f_1(\omega_1) f_4(\omega_2) - f_2(\omega_1) f_3(\omega_2) + f_2(\omega_2) f_3(\omega_1) + f_1(\omega_2) f_4(p_1) + \sqrt{D}}{2(-f_3(\omega_2) f_1(\omega_1) + f_1(\omega_1) f_3(\omega_1))}, \tag{8}$$

$$D = (-f_4(\omega_2) f_1(\omega_1) - f_3(\omega_2) f_2(\omega_1) + f_2(\omega_2) f_3(\omega_1) + f_1(\omega_2) f_4(\omega_1))^2 -$$
$$-4(-f_3(\omega_2) f_1(\omega_1) + f_1(\omega_2) f_3(\omega_1))(-f_2(\omega_1) f_4(\omega_2) + f_4(\omega_1) f_1(\omega_2))).$$

Таким образом, если известны две собственные частоты колебаний системы из трех связанных маятников, то жесткости соединяющих грузы пружин находятся по формулам (8).

Рассмотрим теперь метод нахождения жесткостей пружин по известным трем частотам колебаний механической системы. Сначала решается система уравнений (7) при известных собственных частотах ω_1, ω_2. В результате получим две пары решений относительно коэффициентов жесткостей k_1 и k_2. Аналогично решается система вида (7) при известных значениях частот ω_1, ω_3, которая также имеет две пары решений. Общим решением двух систем уравнений является лишь один набор значений $(k_1;\ k_2)$, который и будет искомым.

Пример 2. Даны частоты $\omega_1 = 2{,}9910\, c^{-1}$, $\omega_2 = 3{,}6251\, c^{-1}$, $\omega_3 = 5{,}3130\, c^{-1}$ колебаний механической системы из трех связанных маятников, а также параметры: $L_1 = 1{,}168 м$, $L_2 = 0{,}556 м$, $L_3 = 0{,}824 м$, $m_1 = 0{,}25 кг$, $m_2 = 0{,}21 кг$, $m_3 = 0{,}27 кг$, $a = 0{,}5 м$. Определить соответствующие жесткости пружин.

Решение. Система уравнений (8) при частотах ω_1 и ω_2 примет вид:

$$\begin{cases} 14{,}0776 k_1 k_2 + 12{,}4445 k_1 - 12{,}8838 k_2 - 14{,}2143 = 0; \\ -23{,}9906 k_1 k_2 + 18{,}7328 k_1 - 6{,}2192 k_2 + 26{,}5928 = 0. \end{cases}$$

Решение системы, найденное с помощью ЭВМ: (1,49999;0,9999); (-1,0058;-0,7665).

Подставляя теперь в уравнение (7) частоты колебаний ω_1 и ω_3 получим:

$$\begin{cases} 14{,}0776 k_1 k_2 + 12{,}4445 k_1 - 12{,}8838 k_2 - 14{,}2143 = 0; \\ -160{,}8876 k_1 k_2 + 1374{,}8239 k_1 + 1534{,}6925 k_2 - 3435{,}5143 = 0. \end{cases}$$

Имеем решение: (1,50000;0,99999); (0,09991;-0,20876).

Сравнивая полученные решения двух систем уравнений, видим, что общим для них является лишь один набор переменных $(k_1 = 1{,}5000;\ k_2 = 1{,}00000)$, который и является искомым. Значит, имеем жесткости пружин: $k_1 = 1{,}5 Н/м$, $k_2 = 1 Н/м$.

Эти же значения жесткостей можно получить, подставляя заданные частоты и физические параметры механической системы в аналитические формулы (8). Заметим, что значения жесткостей пружин определены верно, так как по решению прямой задачи именно данным физическим параметрам и жесткостям пружин соответствуют заданные значения собственных частот колебаний механической системы.

Поставим теперь обратную задачу диагностирования масс грузов рассматриваемой системы из трех связанных маятников. Частотное уравнение (4) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) = g_1(\omega) m_1 m_2 m_3 + g_2(\omega) m_1 m_2 + g_3(\omega) m_1 m_3 + g_4(\omega) m_1 + \\ + g_5(\omega) m_2 m_3 + g_6(\omega) m_2 + g_7(\omega) m_3 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

в котором функции $g_j(\omega)$ $(j = 1,2,...,7)$ выражаются через физические параметры системы и частоты ее колебаний.

Так же как и при диагностировании жесткостей пружин исследована единственность решения поставленной задачи. При этом: V – задача с массами m_1, m_2, m_3 и частотным уравнением (9), V' – задача с массами m_1', m_2', m_3' и частотным уравнением:

$$\begin{aligned} \Delta'(\omega) = g_1(\omega) m_1' m_2' m_3' + g_2(\omega) m_1' m_2' + g_3(\omega) m_1' m_3' + g_4(\omega) m_1' + \\ + g_5(\omega) m_2' m_3' + g_6(\omega) m_2' + g_7(\omega) m_3' = 0. \end{aligned}$$

Доказана теорема.

Теорема 2. *Если собственные частоты задач* V *и* V' *с характеристическими определителями* $\Delta(\omega)$ *и* $\Delta'(\omega)$ *совпадают с учетом их кратностей, то* $m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$ *и* $m_3 = m_3'$.

Из теоремы следует, что массы грузов механической системы можно восстановить единственным образом по известным значениям собственных частот колебаний.

Пример 3. Определить массы грузов системы из трех связанных маятников при известных частотах $\omega_1 = 2{,}9910\, c^{-1}$, $\omega_2 = 3{,}6251\, c^{-1}$, $\omega_3 = 5{,}3130\, c^{-1}$ колебаний и параметрах: $L_1 = 1{,}168м$, $L_2 = 0{,}556м$, $L_3 = 0{,}824м$, $a = 0{,}5м$, $k_1 = 1{,}5 Н/м$, $k_2 = 1 Н/м.$

Решение. Подставим заданные параметры и частоты колебаний в уравнение (9), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -14{,}2143m_1m_2m_3 - 2{,}6638m_1m_2 - 3{,}3109m_1m_3 - 0{,}2482m_1 + 4{,}6877m_2m_3 + 0{,}8785m_2 + 0{,}655m_3 = 0; \\ 26{,}592m_1m_2m_3 - 11{,}7673m_1m_2 + 11{,}9888m_1m_3 - 2{,}122m_1 - 1{,}0257m_2m_3 + 0{,}453m_2 - 0{,}277m_3 = 0; \\ -3435{,}51m_1m_2m_3 + 116{,}159m_1m_2 + 655{,}136m_1m_3 - 8{,}8604m_1 + 31{,}736m_2 \cdot m_3 - 1{,}073m_2 - 3{,}631m_3 = 0. \end{cases}$$

С помощью ЭВМ находим, что полученная система уравнений имеет единственное с физической точки зрения решение: $m_1 = 0{,}25кг$, $m_2 = 0{,}21кг$, $m_3 = 0{,}27кг.$

Заключение

В работе исследована прямая задача определения частот свободных колебаний механической системы из трех связанных маятников. Впервые поставлены обратные задачи – задачи диагностирования характеристик системы из связанных маятников по известным частотам ее свободных колебаний. Решены задачи диагностирования коэффициентов жесткостей пружин и масс грузов системы. Исследована единственность решения задач, доказаны соответствующие теоремы. Предложены методы решения задач, использующие две и три частоты колебаний механической системы. Приведены примеры решений обратных задач.

Методы решений обратных задач можно использовать при исследовании проблемы сохранения безопасных частот колебаний рассматриваемой системы при изменениях ее физических параметров. Кроме того, приведенные методы решений обратных задач можно распространить и на системы из четырех и более маятников, соединенных между собой пружинами.

Список литературы

1. Артоболевский И.И. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 311 с.

2. Бабаков И.М. Теория колебаний: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2004. – 593 с.
3. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машино-строение, 1978. – 239 с.
4. Генкин М.Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. – М.: Машиностроение, 1987. – 282 с.
5. Ланкастер П. Теория матриц: пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 227 с.
6. Павлов Б.В. Акустическая диагностика механизмов. – М.: Машиностроение, 1971. – 311 с.
7. Сафина Г.Ф. Моделирование в диагностировании закреплений цилиндрических оболочек. – Уфа: БашГУ, 2010. – 164 с.
8. Сафина Г.Ф. Диагностирование характеристик валов: монография. – Уфа: БашГУ, 2011. – 122 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
10. Safina G.F. The diagnostics of the mass characteristics of a power installation // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2013. T. 49. № 6. C. 354-363.

Рецензенты:

Урманчеев С.Ф., д.ф.-м.н., профессор, директор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, г. Уфа;

Ахтямов А.М., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой механики сплошных сред, Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Башкирский государственный университет», г. Уфа.