УДК 378, 512

КУРС ПО ВЫБОРУ «ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ПОЛУКОЛЬЦА» ДЛЯ АСПИРАНТОВ-МАТЕМАТИКОВ

Вечтомов Е.М.[1]

[1]*ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет» Минобрнауки РФ, Киров, Россия, e-mail: mathematic@vshu.kirov.ru*

В статье дается характеристика авторского курса «Функциональная алгебра и полукольца», читаемого в ВятГГУ аспирантам направленности Математическая логика, алгебра и теория чисел направления подготовки 01.06.01 Математика и механика. Раскрывается структура и содержание курса, методология и методика его изучения. Анализируется место и значение этой дисциплины в системе подготовки вузовских преподавателей математики и математиков-исследователей. Рассматриваются тематика и проблематика функциональной алгебры и теории полуколец. Материал курса состоит из трех частей: классическая функциональная алгебра, абстрактные полукольца, полукольца непрерывных функций. По двум последним разделам кировские математики ведут исследования более 20 лет. Курс «Функциональная алгебра и полукольца» воплощает в себе реальное соединение высшего математического образования с современной математикой. Он завершает специальную учебную подготовку аспирантов-математиков и служит основой их самостоятельной научно-исследовательской деятельности по выбранной теме.

Ключевые слова: учебная дисциплина, математика, обучение, функциональная алгебра, теория полуколец, исследование.

OPTIONAL COURSE «FUNCTIONAL ALGEBRA AND SEMIRINGS» FOR POSTGRADUATE STUDENTS-MATHEMATICIANS

Vechtomov E.M.[1]

[1] *Vyatka State University of Humanities, Kirov, Russia, e-mail: mathematic@vshu.kirov.ru*

In the article the author gives a characterization of his own course “Functional algebra and semirings” that he conducts for postgraduate students from VSHU with directivity Mathematical logic, Algebra and Number Theory, direction of training 01.06.01 Mathematics and Mechanics. The structure and content of the course, methodology and methods of its study are revealed. The place and importance of this discipline in the training of university teachers of Mathematics and mathematicians-researchers are analyzed. The topics and problems of algebra and functional theory of semirings are considered. The course material consists of three parts: the classical function algebra, abstract semirings, and semirings of continuous functions. On the last two of these sections mathematics of Kirov have been doing research for over the past 20 years. The course "Functional algebra and semirings" embodies a real connection of the higher Mathematical Education with Contemporary Mathematics. It completes special training of graduate students in Mathematics and is the basis of their own research activities on the chosen theme.

Keywords: academic discipline, Mathematics, education, Functional Algebra, Theory of Semirings, research.

Аспирантура в Российской Федерации стала третьим уровнем высшего образования. Очное обучение аспирантов по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика длится 4 года. В Вятском государственном гуманитарном университете (ВятГГУ) на 2-ом году обучения ведутся специальная дисциплина «Математическая логика, алгебра и теория чисел» и курс по выбору «Функциональная алгебра и полукольца». Спецдисциплина соответствует направленности (специальности) Математическая логика, алгебра и теория чисел. А курс по выбору связан с научным направлением «Функциональная алгебра и теория полуколец» [1], развиваемым математиками нашего университета. Оба курса служат как знаниевой базой для успешной работы аспирантов над кандидатскими диссертациями, так и основой для сдачи государственного экзамена.

Курс «Функциональная алгебра и полукольца» является авторским, его по очереди читают доктора физико-математических наук, профессора Е.М. Вечтомов и В.В. Чермных. Этот курс естественным образом встроен в систему подготовки математиков в ВятГГУ: он венчает и завершает цикл математических дисциплин в цепочке бакалавриат $\to$ магистратура $\to$ аспирантура. Кафедра фундаментальной и компьютерной математики (ФКМ) ВятГГУ является выпускающей по направлениям подготовки студентов Математика и компьютерные науки (бакалавриат, магистратура) и Педагогическое образование, профили Математика и Математика. Информатика (бакалавриат, магистратура). Лучшие выпускники обеих магистратур могут продолжить свое обучение в нашей математической аспирантуре.

Бакалавры четыре семестра изучают алгебру и по одному семестру – математическую логику и теорию чисел. Причем бакалавры направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки в 4-ом семестре овладевают учебной дисциплиной «Абстрактная алгебра: группы, кольца, поля» [6]. Отметим также, что в 1-ом семестре бакалавры изучают «Вводный курс математики [8], содержащий азы элементарной логики, теории множеств и комбинаторики. Магистрантам обоих направлений подготовки преподаются дисциплины «Современная алгебра» и «Упорядоченные множества и решетки» [3], органично продолжающие алгебраические курсы бакалавратуры. При этом магистрантам направления подготовки 02.04.01 Математика и компьютерные науки (профиль «Алгебра и дискретная математика») читается также авторский курс «Теория полуколец» [5]. Наконец, спецдисциплина для аспирантов «Математическая логика, алгебра и теория чисел» предваряет курс по выбору.

Научно-математические аспекты. Кратко охарактеризуем функциональную алгебру и теорию полуколец как части математической науки.

Функциональная алгебра представляет собой раздел современной математики, находящийся на стыке абстрактной алгебры, общей топологии, топологической алгебры и функционального анализа, имеет два основных направления исследований:

1) алгебры $A(X)$ непрерывных функций, ассоциированные с топологическими пространствами X [2, 4, 7, 10];

2) функциональные представления и характеризации абстрактных алгебраических структур [2, 4, 5, 9].

Функциональная алгебра – первоначально как теория колец непрерывных функций – зародилась в 30-е годы XX века в работах М. Стоуна (1937 г.), И.М. Гельфанда и А.Н.

Колмогорова (1939 г.), ее основы были заложены Капланским (1947 г.), Хьюиттом (1948 г.), Гиллманом, Хенриксеном, Джерисоном (50-е годы прошлого столетия).

Назовем главные общие задачи направления 1):

описание структурных свойств данного типа алгебраических объектов A(X), включая их абстрактную характеризацию;

определяемость топологических пространств X и их топологических свойств в терминах алгебраических систем A(X);

установление двойственностей между категориями топологических пространств X из естественных классов пространств и соответствующими категориями алгебраических систем A(X). Пространства X играют роль исходных математических объектов, а системы A(X) – роль производных математических структур.

В указанном направлении работали и работают кировские математики В.И. Варанкина, Е.Н. Лубягина, М.Н. Подлевских, И.А. Семенова, В.В. Сидоров, Д.В. Чупраков, Н.В. Шалагинова, Д.В. Широков – представители научной школы «Функциональная алгебра и теория полуколец» (основатель и руководитель Е.М. Вечтомов). Вечтомов занимался исследованием колец непрерывных функций, построил общую теорию колец непрерывных функций, основанную на понятии их максимального спектра [10]. Мы 20 лет ведем систематическое изучение полуколец непрерывных функций [4, 5, 7], являясь пионерами в этой тематике.

К направлению 2) относятся вопросы представления (реализации) абстрактных алгебраических систем (групп, колец, дистрибутивных решеток, полуколец, решеточно упорядоченных колец, универсальных алгебр) в виде алгебраических систем непрерывных функций. В основном это теория пучковых представлений, которая развивается уже более 55 лет и включает работы Гротендика, Пирса, Гофмана, Ламбека, Симмонса, Голана.

Продолжая исследования отмеченных математиков, В.В. Чермных развил теорию пучковых представлений полуколец [9], а Е.М. Вечтомов и его ученица А.В. Черанева построили пучковые представления полутел.

Теория полуколец – это раздел абстрактной алгебры, обобщающий теорию колец и теорию дистрибутивных решеток. Класс полуколец включает в себя основные числовые системы и целый ряд объектов-конструкций над числовыми полукольцами. Теория полуколец развивается, начиная с 50-х годов XX столетия, особенно интенсивно последние 30 лет, что связано с задачами дискретной математики и потребностями компьютерных наук. Полукольца находят многочисленные применения в компьютерной математике, теории графов, криптографии, идемпотентном анализе, теории оптимального управления и т. д.

Различные классы абстрактных полуколец исследовали кировские алгебраисты А.С. Бестужев, Е.М. Вечтомов, М.И. Лукин, Р.В. Марков, И.В. Орлова, А.А. Петров, А.В. Ряттель, А.Н. Семенов, О.В. Старостина, А.В. Черанева, В.В. Чермных. Достаточно хорошо (вплоть до полного описания) изучены абелево регулярные положительные полукольца, полукольца с циклическим умножением, мультипликативно идемпотентные полукольца, полутела, расширения кольца с помощью полутела, полукольца с «богатым» набором дополняемых идемпотентов.

Перечислим диссертации работы, защищенные членами нашей научной школы.

1. Вечтомов Е.М. Кольца непрерывных функций. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Кишинев: Институт математики с ВЦ АН Молдавской ССР, 1979.

2. Вечтомов Е.М. Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле. Дисс. … докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1994.

3. Чермных В.В. Пучковые представления полуколец. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1994.

4. Чермных В.В. Функциональные представления полуколец и полумодулей. Дисс. … докт. физ.-мат. наук. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2007.

5. Варанкина В.И. Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1996.

6. Семенова И.А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1999.

7. Подлевских М.Н. Полукольца непрерывных функций с топологией поточечной сходимости. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1999.

8. Ряттель А.В. Положительно упорядоченные полукольца. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 2003.

9. Широков Д.В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 2005.

10. Старостина О.В. Абелево-регулярные положительные полукольца. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 2007.

11. Черанева А.В. Ядра и пучки полутел. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 2008.

12. Лукин М.А. Полукольцевые объединения кольца и полутела. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 2009.

13. Чупраков Д.В. Конгруэнции на полукольцах и полуполях непрерывных числовых функций. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 2010.

14. Сидоров В.В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Казань: КФУ, 2011.

15. Лубягина Е.Н. Полукольца непрерывных [0, 1]-значных функций. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012.

16. Марков Р.В. Пирсовские слои и цепи полуколец. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2015.

17. Петров А.А. Мультипликативно идемпотентные полукольца. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2015.

Укажем еще ряд тем, над которыми мы работаем:

- Мультипликативно циклические полукольца (А.С. Бестужев, И. В. Орлова);
- Полукольца непрерывных (0, ∞]-значных функций (Н. В. Шалагинова);
- Полукольца непрерывных частичных функций (Е.Н. Лубягина);
- Матричные полутела (Я.В. Петухова);
- Полумодули над полукольцами непрерывных функций (Д.В. Широков, Р.В. Топоров);
- Конечнопорожденные полуполя (М.А. Суворова);
- Пучковые представления полумодулей (Е.Л. Родыгина);
- Пучковые представления решеточно упорядоченных полуколец (О.В. Чермных);
- Структурные изоморфизмы полуполей непрерывных функций (В.В. Сидоров).

Структура и содержание курса. Курс по выбору «Функциональная алгебра и полукольца» читается аспирантам направленности «Математическая логика, алгебра и теория чисел» в 4-ом семестре. Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы, то есть 144 академических часа – при очном обучении 48 аудиторных часов (24 часа лекций, 24 часа практических занятий) и 96 часов самостоятельной работы. Промежуточная аттестация – зачет.

Изучаемый материал разбит нами на 10 тем:

1. ***Основные понятия и классы полуколец*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.). Рассматриваются следующие вопросы: Аксиоматика теории полуколец. Важнейшие примеры. Кольца и аддитивно сократимые полукольца. Аддитивно идемпотентные полукольца. Дистрибутивные решетки.

2. ***Полутела*** (12 часов = 2 л. +2 пр.з.+8 с.р.): основные примеры и свойства полутел. Аддитивно идемпотентные и аддитивно сократимые полутела. Сократимая часть полутела. Полуполя.

3. ***Идеалы и конгруэнции в полукольцах*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.): виды идеалов полуколец: полустрогие, строгие, простые, первичные, максимальные и др. Решетка идеалов

полукольца. Гомоморфизмы, конгруэнции и факторполукольца. Универсальные конгруэнции. Решетка конгруэнций полукольца.

4. ***Конструкции и структурные теоремы для полуколец*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.): прямое и подпрямое произведения полуколец. Расширения полуколец. Общая структурная теорема. Мультипликативно циклические полукольца. Упорядоченные и решеточно упорядоченные полукольца.

5. ***Булевы алгебры*** (24 часа = 4 л.+4 пр.з.+16 с.р.): ограниченные дистрибутивные решетки. Булевы решетки. Их свойства и характеризации. Булевы кольца, их связь с булевыми решетками. Пространство максимальных идеалов булева кольца. Теорема Стоуна о представлении булевых колец и булевых решеток.

6. ***Кольца непрерывных функций*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.): решетка нуль-множеств и z-идеалы. Максимальные и простые идеалы колец $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций. Теорема Гельфанда – Колмогорова. Двойственность Хьюитта. Подалгебры в $C(X)$. Теорема Стоуна – Вейерштрасса.

7. ***Полукольца непрерывных функций*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.): полукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций на топологических пространствах. Их идеалы, конгруэнции и подалгебры. Связь с кольцами $C(X)$. Топологические полукольца $C^+(X)$ с топологией поточечной сходимости.

8. ***Полуполя непрерывных функций*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.): полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций. Конгруэнции и максимальные конгруэнции на $U(X)$.

9. ***Коммутативные банаховы алгебры*** (12 часов = 2 л.+2 пр.з.+8 с.р.): спектр банаховой алгебры. Теорема Гельфанда-Мазура. Преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры. Функциональное представление коммутативных банаховых алгебр с инволюцией.

10. ***Функциональные представления полуколец*** (24 часа = 4 л.+4 пр.з.+16 с.р.): понятие пучка колец и полуколец. Компактные пучки. Пучки Гротендика, Ламбека и Пирса. Пучковые представления Гротендика, Ламбека и Пирса для полуколец. Функциональные (пучковые) характеризации свойств полуколец.

Изучение материала курса мы осуществляем в предложенной последовательности рассмотрения тем. Допустим и альтернативный маршрут: сначала изучить классику жанра – темы 5, 6, 9, а затем двигаться по выбранному пути.

Темы 5, 6 и 9 относятся к классической математике XX века и составляют первую базу знаний, необходимую для успешной научной деятельности в области функциональной алгебры. Темы 1–4 являются введением в теорию полуколец и образуют вторую базу знаний. В третью базу знаний входят темы 7, 8 и 10, связанные с современным состоянием и развитием функциональной алгебры. Эти темы опираются на первые две знаниевые базы, которые также допускают дальнейшее расширение и развитие – в данном направлении продолжает работать и коллектив алгебраистов кафедры ФКМ. Возобновился наш интерес к кольцам C(X) непрерывных действительнозначных функций, в частности к исследованию решеток подалгебр в C(X) и изучению модулей над C(X).

Методология и методика. Среди основных методологических подходов в математике (аксиоматика, координатизация, линеаризация, теория множеств, теория категорий, конструктивизм) выделяется ***функциональный подход***, который позволяет реализовывать абстрактные математические объекты в виде более наглядных и конкретных систем функций (отображений, преобразований). Пучковые представления колец и полуколец – одно из ярких проявлений функционального метода в математике. В обсуждаемом курсе функциональная методология занимает особое место. Соответственно, в методике преподавания курса аксиоматический метод сочетается с функциональным методом. Другой важнейший методический аспект заключается в изучении-перекличке хорошо известного материала и нового научного знания, зачастую полученного нашими преподавателями и аспирантами. Аспиранты выступают с презентациями и докладами по тематике курса на региональном научном алгебраическом семинаре и на различных математических и научно-методических конференциях.

Значение курса. Покажем теперь роль и место данного курса в обучении аспирантов-математиков. Курс «Функциональная алгебра и полукольца» опирается на усвоенные аспирантом математические дисциплины бакалавриата и магистратуры и на только что пройденную им специальную дисциплину «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Курс являет собой вершину специальной учебно-исследовательской подготовки аспиранта, служащей фундаментом его самостоятельной научно-исследовательской работы на 3-ем и 4-ом курсах аспирантуры. Результатом научно-исследовательской деятельности аспиранта должна стать кандидатская диссертация, доклад по которой – согласно уточненной редакции ФГОС от 30.04.2015 г.– включен в государственную итоговую аттестацию аспирантов. Рассматриваемый курс выступает в роли связующего звена между серьезным учением-обучением и научным исследованием в области математики.

Заключение. Аспирантский курс «Функциональная алгебра и полукольца» служит завершающим звеном непрерывного математического образования в регионе, является важной составной частью подготовки вузовских преподавателей математики и математиков-исследователей, выступает как элемент синтеза высшего математического образования и математической науки.

Работа выполнена в рамках гранта РГНФ и Кировской области «Проблемы и перспективы развития непрерывного математического образования в Кировской области» № 15-16-43005 и проектной части государственного задания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца» № 1.1375.2014/К.

Список литературы

1. Варанкина, В.И., Вечтомов, Е.М. Научная алгебраическая школа // Герценка: Вятские записки. – 2009. – Вып. 15. – С. 199–207.

2. Вечтомов, Е.М. Функциональные представления колец: монография. – М.: Изд-во МПГУ, 1993. – 190 с.

3. Вечтомов, Е.М. О сновные математические структуры: учеб. пособие. – Киров: О О О «Радуга-ПРЕСС», 2013. – 292 с.

4. Вечтомов, Е.М., Варанкина, В.И. Развитие функциональной алгебры в Вятском государственном гуманитарном университете // Вестник ВятГГУ. – 2015. – № 5. – С. 137–145.

5. Вечтомов, Е.М., Лубягина, Е.Н., Чермных, В.В. Элементы теории полуколец: монография. – Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. – 228 с.

6. Вечтомов, Е.М., Сидоров, В.В. Абстрактная алгебра. Базовый курс: учеб. пособие. – Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. – 260 с.

7. Вечтомов, Е.М., Сидоров, В.В., Чупраков, Д.В. Полукольца непрерывных функций: монография. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 312 с.

8. Вечтомов, Е.М., Широков, Д.В. Математика. Вводный курс: учеб. пособие. – Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. – 240 с.

9. Chermnykh, V.V. Functional representations of semirings // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 2012. – Vol. 187. – № 2. – P. 187–267.

10. Vechtomov, E.M. Rings of continuous functions with values in a topological division ring // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 1996. – Vol. 78. – № 6. – P. 702–753.

Рецензенты:

Калинин С.И., д.п.н., профессор ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров;

Чермных В.В., д.ф.-м.н., профессор ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров.