УДК 517.929.7

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Лесев В.Н., Шарданова М.А.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173), e-mail: shardanova2010@yandex.ru

В работе сформулирована краевая задача для вырождающегося неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом. Отклонение аргумента в уравнении носит иволютивный характер. Уравнение рассмотрено на симметричном относительно начала координат интервале, причем в точке t = 0 исходное дифференциальное уравнение вырождается в функциональное. Решение задачи найдено в виде полинома четвертой степени. В работе показано, что проблема нахождения коэффициентов многочлена, определяющего решение задачи, редуцируется к вопросу разрешимости соответствующей системы алгебраических уравнений. После представления последней в матричной форме было установлено условие гарантирующее существование единственного решения системы алгебраических уравнений. В результате получено аналитическое решение исходной задачи, принадлежащее требуемому классу функций. Найденное решение позволяет проводить численный анализ задачи с последующей визуализацией решения.

Ключевые слова: краевая задача, вырождающееся уравнение, отклоняющийся аргумент, полиномиальное решение

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DEGENERATING DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE DEVIATING ARGUMENT

Lesev V.N., Shardanova M.A.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov», Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Chernyshevskogo st.,173), e-mail: shardanova2010@yandex.ru

The paper formulates a boundary-value problem for a second-order degenerate heterogeneous ordinary differential equation with deviating argument. Argument deviation in the equation is of an evolutive character. The equation is considered at an origin-symmetric interval. Besides, in the point t = 0, the initial differential equation degenerates into a functional equation. Solution of the problem is found in the form of a fourth-degree polynomial. The paper demonstrates that the problem of finding coefficients of a polynomial determining the solution of the problem is reduced to a question of solvability of corresponding system of algebraic equations. After presenting the system in a matrix form, the condition ensuring existence of a single solution of the systemwas established. This resulted in obtaining an analytical solution of the initial problem, belonging to the required function class. The solution found allowscarrying out of a numerical analysis of a problem with the subsequent visualization of the solution.

Keywords: boundary value problem, degenerating equation, deviating argument, polynomial decision

Полиномиальным решениям дифференциальных уравнений посвящено немало работ (например, [1,2,4,5]). Вместе с тем исследования, посвященные доказательству разрешимости дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом таким методом, практически отсутствуют. Тем более остаются мало исследованы вырождающиеся уравнения с отклоняющимся аргументом, которые возникают при редукции вопросов разрешимости уравнений в частых производных к вопросу разрешимости, соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений [3,6,7].

В настоящей работе предложено полиномиальное решение для модельного неоднородного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.

Цель исследования

Доказать разрешимость двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом методом посредством построения полиномиального решения.

Постановка задачи. На отрезке $I=[-a,a]$ рассмотрим уравнение

$$t\cdot y''(t)+b\cdot y(-t)=c, \tag{1}$$

где $a,b,c-const,$ причем $a>0.$

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача 1. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$y(-a)=d_1, \qquad y(a)=d_2. \tag{2}$$

где $d_{1.2}-const.$

Доказательство разрешимости. Решение задачи 1 будем искать в виде

$$y(t)=\alpha_0+\sum_{i=1}^{4}\alpha_i t^i, \tag{3}$$

где $\alpha_j-const\left(j=\overline{0,4}\right).$

Подставляя (3) в (1), получим:

$$\left(2\alpha_2+6\alpha_3 t+12\alpha_4 t^2\right)\cdot t+b\left(\alpha_0-\alpha_1 t+\alpha_2 t^2-\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4\right)=c. \tag{4}$$

Отсюда при $t=0$ находим:

$$\alpha_0=\frac{c}{b}. \tag{5}$$

Для определения коэффициентов $\alpha_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ положим в (4) $t=-a,$ а затем $t=a$. В результате будем иметь:

$$\left(2\alpha_2-6\alpha_3 a+12\alpha_4 a^2\right)\cdot(-a)+b\left(\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4\right)=0,$$
$$\left(2\alpha_2-6\alpha_3 a+12\alpha_4 a^2\right)\cdot a+b\left(-\alpha_1 a+\alpha_2 a^2-\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4\right)=0,$$

или

$$\begin{aligned}&\alpha_1 ab+\alpha_2\left(a^2b-2a\right)+\alpha_3\left(a^3b+6a^2\right)+\alpha_4\left(a^4b-12a^3\right)=0,\\&\alpha_1 ab-\alpha_2\left(a^2b+2a\right)+\alpha_3\left(a^3b-6a^2\right)-\alpha_4\left(a^4b+12a^3\right)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

С другой стороны, удовлетворяя (3) условиям (2), получим:

$$\begin{aligned}\alpha_1 a-\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3-\alpha_4 a^4&=\alpha_0-d_1,\\ \alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4&=d_2-\alpha_0.\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя систему (6), (7) в матричной форме, будем иметь:

$$AB=C, \tag{8}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} ab & a^2b-2a & a^3b+6a^2 & a^4b-12a^3 \\ ab & -a^2b-2a & a^3b-6a^2 & -a^4b-12a^3 \\ 0 & -a^2 & a^3 & -a^4 \\ 0 & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \alpha_0-d_1\\ d_2-\alpha_0\end{pmatrix}.$$

Из (8) очевидно находим:

$$B=A^{-1}C. \tag{9}$$

В силу легко устанавливаемого неравенства:

$$|A|=-240\cdot a^8\neq 0,$$

убеждаемся в том, что задача 1 допускает построение приближенного аналитического решения в виде (3), где $\alpha_j\left(j=\overline{0,4}\right)$ определяются соотношениями (5) и (9).

Исследование частного случая

В качестве частного случая рассмотрим уравнение (1), когда $a=1, b=-1, c=5.$

Таким образом, уравнение (1) принимает вид:

$$t\cdot y''(t)+y(-t)=5, \tag{10}$$

где $a=1, b=-1, c=5,$ причем $a>0.$

Для уравнения (10) на интервале $I=[-1,1]$ исследуем следующую задачу.

Задача 2. *Найти регулярное решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям:*

$$y(-1)=-1,\qquad y(1)=1. \tag{11}$$

Решение задачи 2 будем искать описанным выше методом, в виде полинома (3).
Подставляя выбранные значения для c и b в соотношение (5), находим:

$$\alpha_0 = \frac{c}{b} = -5, \qquad (14)$$

Для определения коэффициентов $\alpha_i \left(i = \overline{1,4}\right)$ получаем систему уравнений:

$$AB = C, \qquad (15)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & -13 \\ -1 & -1 & -7 & -13 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Разрешая (15) относительно столбца неизвестных, будем иметь:

$$B = A^{-1}C. \qquad (16)$$

Легко убедиться в том, что:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 39 & 26 \\ -0.5 & 0.5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -3.5 & -2.5 \end{pmatrix},$$

Таким образом, из (16) с учетом (14) получим:

$$y(t) = -5 + 6t^2 + t^3 - t^4. \qquad (17)$$

На основе соотношения (17) в пакете MathCad были проведены вычислительные эксперименты.

Результаты вычислительного эксперимента, связанного с построением графика функции, определяющей решение задачи 2, представлены на следующем рисунке.

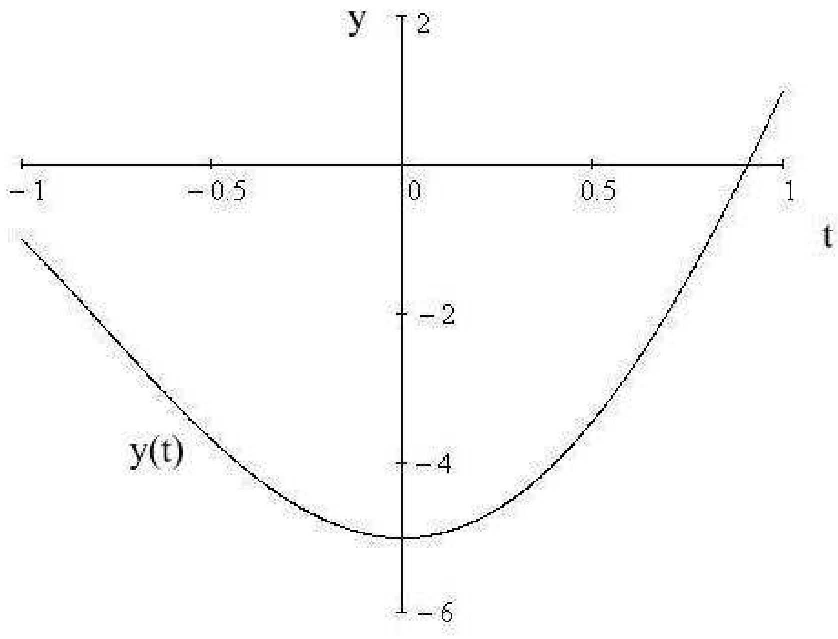

График функции y(t)

Расчеты показывают, что полученное решение удовлетворяет всем условиям сформулированной задачи.

Заключение

Таким образом, в работе предложен метод построения полиномиального решения задачи 1 в виде (3). Данное решение является приближенным аналитическим решением исходной задачи, принадлежит требуемому классу функций и позволяет провести численный анализ с визуализацией решения практически без временных затрат.

Список литературы

1. Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е. Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // Фундаментальная и прикладная математика. — 2012. — Т. 17. — В. 1. — С. 3–21.

2. Абрамов С.А., Рябенко А.А. Определяющие рациональные функции линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14. В. 4. — С. 15–34.

3. Боташева Д.Р. Доказательство разрешимости классической краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом при старшей производной // Естественные и математические науки в современном мире. — 2014. — № 18. — С. 8–13.

4. Карачик В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // ЖВМиМФ. — 2012. — Т. 52. — № 2. — С. 237–252.
5. Карачик В.В., Антропова Н.А. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона // Труды МФ-ТИ. — 2011. — Т. 3. — № 3. — С. 132–145.
6. Bzheumikhova O.I., Lesev V.N. Application of Fourier method to investigation of the Dirichlet problem for partial differential equations with deviating arguments // International Journal of Differential Equations and Applications, 2013. – Vol. 12, № 2. – P. 103–120.
7. Lesev V.N., Bzheumikhova O.I. On the unique solvability of the classical boundary value problem for the partial differential equations with the deviating argument // Far East Journal of Mathematical Sciences, 2015. – V. 97. Issue 7. – P. 793–807.

Рецензенты:

Журтов А.Х., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой геометрии и высшей алгебры Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик;

Хаширова Т.Ю., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой САКТУ Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик.