УДК 517.946.9

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Кудаева Ф.Х.[1], Кайгермазов А.А.[1], Нахушева Ф.М.[1], Долова М.Х.[2], Мамбетов М.Ж.[1]

[1]*«Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*
[2]*ГБЗУ «Городская клиническая больница № 1», Нальчик, Россия (360000, г. Нальчик, ул. Головко, 7), e-mail: 1.@mail.ru*

Если в криохирургической практике при охлаждении поверхности биологической ткани используется криоинструмент, который представляет собой круг или полусферу, то температурное поле обладает осевой симметрией, и, следовательно, зависит только от двух пространственных координат. Предлагаемая работа посвящена таким двумерным задачам со свободными границами возникающих при математическом моделировании медицинских проблем. В работе рассмотрены новые постановки двумерных двухфазных задач со свободными границами в сферической и цилиндрической системах координат. Для сформулированных задач получены постановки стационарных задач. В случае когда при монотонно понижающейся до некоторого предельного значения температуре аппликатора максимальные размеры зон криопоражения, замораживания и теплового возмущения достигают стационарного состояния, получены соответствующие стационарные задачи Стефана. Для полусферической охлаждающейся поверхности криозонда получена двухфазная задача типа Стефана. Некоторые условия регулярности на бесконечности заменены краевыми условиями Дирихле или Неймана. Температурное поле определено только в возмущенной в тепловом отношении области биологической ткани. При ограничениях на зоны теплового возмущения получены постановки задач Стефана для полуограниченных сред. Полученные результаты можно применить при конструировании и совершенствовании криоинструментов.

Ключевые слова: температурное поле, задача со свободными границами, двухфазная задача, цилиндрическая система координат, сферическая система координат.

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM WITH FREE BOUNDARIES

Kudayeva F.H.[1], Kajgermazov A.A.[1], Nakhusheva F.M.[1], Dolova M.H.[2], Mambetov M.W.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov" Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*
[2] *GBZU, City clinical hospital №1, Nalchik, Russia (360000, Nalchik, Golovko str. 7), e-mail: 1.@mail.ru*

If cryosurgical practice while cooling the surface of the biological-ecological fabric uses a device that is a circle or a hemisphere, the temperature field has axial symmetry, and therefore only depends on two spatial coordinates. The proposed work focuses on two-dimensional problems with free boundary-mi arising in the mathematical modeling of medical problems.The paper considers new productions of two-dimensional two-phase problems with free boundaries in spherical and cylindrical systems of coordinates. For the formulated problems obtained performances for stationary, cottages. In the case when a monotonically decreasing up to some limitstion values of the temperature applicator maximum sizes of the zones of crypo expression, freezing and thermal perturbations reach a stationary state corresponding stationary Stefan problem. For hemispherical cooling the surface of the cryoprobe is captured on the two-phase Stefan-type problem. Some conditions of regularity at innity replaced by Dirichlet boundary conditions or Neumann. Tempe-temperature field is defined only in perturbed in thermal relation to the field of biological tissue. With limitation of the heat zone Osmosetion, the resulting formulation of Stefan problems for semi-infinite media. The results can be applied in the design and improvement of cryoinstruments.

Keywords: temperature field, the problem with free boundary, two-phase task, cylindrical coordinate system, spherical coordinate system.

В работе рассматриваются новые постановки двумерных двухфазных задач со свободными границами в цилиндрической и сферической системах координат. Поставленные задачи Стефана не содержат начальных условий, так как температурное поле определяется только в возмущенной в тепловом отношении области биологической ткани.

При ограничениях на зоны теплового возмущения получены постановки задач Стефана для полуограниченных сред. Условия регулярности на бесконечности при достаточно больших значениях зонах теплового возмущения заменены краевыми условиями Дирихле или Неймана.

1. Осесимметричная криодеструкция

Если охлаждающая поверхность криоинструмента представляет собой круг или полусферу, что наиболее часто встречается в криохирургической практике, то температурное поле в биоткани обладает осевой симметрией и, следовательно, зависит только от двух пространственных координат. В цилиндрической системе координат - φ, r и z, в сферической от r и Θ. Воспользовавшись выражениями для градиента в цилиндрической:

$$grad\mathrm{T} = \mathrm{T}_r \vec{I}_1 + r^{-1}\mathrm{T}_\varphi \vec{I}_2 + \mathrm{T}_z \vec{I}_3$$

и сферической:

$$\nabla\mathrm{T} = \mathrm{T}_r \vec{I}_4 + r^{-1}\mathrm{T}_\Theta \vec{I}_2 + (r\sin\Theta)^{-1}\mathrm{T}_\varphi \vec{I}_3$$

системах координат, получаем выражения для нормали к изотермической поверхности $\Phi(r,z,t)=\Phi(r,\Theta,t)$ ее кажущейся скорости в направлении нормали $v_n = -\Phi_t / |\nabla\Phi|$ и производной $\partial\mathrm{T}/\partial n * (\nabla\mathrm{T}, \vec{n})$:

$$\begin{aligned}
&\vec{n} = \nabla\Phi/|\nabla\Phi| = \left(-z_r * \vec{I}_1 + \vec{I}_2\right)\sqrt{1+z_r^2} = \left(\vec{I}_1 - R_z * \vec{I}_3\right)/\sqrt{1+R_z^2},\\
&v_n = z_t/\sqrt{1+z_r^2} = R_t/\sqrt{1+R_z^2},\\
&\partial\mathrm{T}/\partial n = \left(-\mathrm{T}_r * z_r + \mathrm{T}_z\right)/\sqrt{1+z_r^2} = \left(\mathrm{T}_r - R_z * \mathrm{T}_z\right)/\sqrt{1+R_z^2},\\
&(\Phi(r,z,t) = z - Z(r,t) = r - R(z,t) = 0);\\
&\vec{n} = \left(\vec{I}_1 - R_\Theta * \vec{I}_2/r\right)/\sqrt{1+(R_\Theta/r)^2} = \left(-r\Theta_r * \vec{I}_1 + \vec{I}_2\right)/\sqrt{1+(r\Theta_r)^2},\\
&v_n = R_t/\sqrt{1+(R_\Theta/r)^2} = \Theta_t/\sqrt{1+(r\Theta_r)^2},\\
&\partial\mathrm{T}/\partial n = \left(\mathrm{T}_r - R_\Theta * \mathrm{T}_\Theta/r^2\right)/\sqrt{1+(R_\Theta/r)^2} = \left(-r\Theta_r * \mathrm{T}_r + \mathrm{T}_\Theta/r\right)/\sqrt{1+(r\Theta_r)^2},\\
&(\Phi(r,\Theta,t) = r - R(\Theta,t) = \Theta - \Theta(r,t) = 0).
\end{aligned}$$

С помощью этих формул легко записываются условия сопряжения $[\lambda\,\partial\mathrm{T}/\partial n]_n = -p_0 v_n^n, [\lambda\,\partial\mathrm{T}/\partial n]_* = -p v_n^*$ и условие $\partial\mathrm{T}/\partial n = 0$ на поверхности $\Phi_{\text{B}}(r,z,t) = \Phi_{\text{B}}(r,\Theta,t) = 0$.

В случае плоского кругового аппликатора температурное поле можно рассматривать как в цилиндрической $\mathrm{T}=\mathrm{T}(r,z,t)$, так и в сферической $\mathrm{T}=\mathrm{T}(r,\Theta,t)$ системах координат. Если же охлаждающая поверхность представляет собой полусферу радиуса r_0, то предпочтительной является сферическая система координат, так как поверхность биологической ткани совпадает с координатными поверхностями $r = r_{0,}\ 0 \le \Theta \le \pi/2$ и $\Theta = \pi/2$ и $r_0 \le r \le R^{\text{в}}\left(\pi/2, t\right)$. Итак, если криодеструкция осуществляется плоским круговым криозондом, то для $\text{T}(r, z, t)$ и соответствующих изотерм получаем нестационарную задачу Стефана [1-3]:

$$\Delta\text{T} - \frac{1}{\underline{a}^2}\text{T}_t = 0, \Phi_n(r,z,t) < 0; \Delta\text{T} - \frac{1}{\underline{a}^2}\text{T}_t = -\frac{w(\text{T})}{\underline{\lambda}}, \Phi^*(r,z,t) < 0;$$
$$\Delta\text{T} - \frac{1}{\bar{a}^2}\text{T}_t = -\frac{w(\text{T})}{\bar{\lambda}}, \Phi_{\text{В}}(r,z,t) < 0,$$
$$\Delta\text{T} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\text{T}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\text{T}}{\partial z^2};$$
$$\lambda(\text{T})\frac{\partial\text{T}}{\partial z} - \alpha[\text{T} - \text{T}_c(r)] = 0, z = 0, 0 < r < R^{\text{в}}(0,t) t > 0,$$
$$\frac{\partial\text{T}}{\partial r} = 0, r = 0, 0 < z < z^{\text{в}}(r,t); \text{T} = \bar{\text{T}}; z > z^{\text{в}}(r,t) t > 0;$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_z]_n - [\lambda(\text{T})\text{T}_r]_n * z_r^n = -pz_t^n, z = z^n(r,t)$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_r]_n - [\lambda(\text{T})\text{T}_z]_n * R_z^n = -pR_t^n, r = R^n(z,t), [\text{T}]_n = 0;$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_z]_* - [\lambda(\text{T})\text{T}_r]_* * z_r^* = -pz_t^*, z = z^*(r,t),$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_r]_* - [\lambda(\text{T})\text{T}_z]_* * R_z^* = -pR_t, r = R^*(z,t), [\text{T}]_* = 0;$$
$$\text{T}_z - \text{T}_r * z_r^{\text{В}} = 0, z = z^{\text{В}}(r,t); \text{T}_r - \text{T}_z * R_z^{\text{В}} = 0, r = R^{\text{в}}(z,t),$$

и нестационарную пространственно локализованную задачу Стефана в случае полусферической охлаждающей поверхности криозонда:

$$\Delta\text{T} - \frac{1}{\underline{a}^2}\text{T}_t = 0, \Phi_n(r,\Theta,t) < 0, \Delta\text{T} - \frac{1}{\underline{a}^2}\text{T}_t = -\frac{w(\text{T})}{\underline{\lambda}}, \Phi^*(r,\Theta,t) < 0,$$
$$\Delta\text{T} - \frac{1}{\bar{a}^2}\text{T}_t = -w(\text{T})/\bar{\lambda}, \Phi_{\text{В}}(r,\Theta,t) < 0;$$
$$\Delta\text{T} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\text{T}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{1}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial\text{T}}{\partial\Theta}\right);$$
$$\lambda(\text{T})\frac{\partial\text{T}}{\partial r} - \alpha_{\text{А}}(\text{T} - \text{T}_{\text{А}}) = 0, r = r_0, 0 < \Theta < \pi/2; \frac{\partial\text{T}}{\partial\Theta} = 0; \Theta = 0, r_0 < r < R^{\text{в}}(0,t),$$
$$\lambda(\text{T})\frac{\partial\text{T}}{r\partial\Theta} + \alpha_c[\text{T} - \text{T}_c(r)] = 0, \Theta = \pi/2, r_0 < r < R^{\text{в}}\left(\pi/2, t\right); \text{T} = \bar{\text{T}}, r \ge R^{\text{в}}(\Theta,t),$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_r]_n - [\lambda(\text{T})\text{T}_\Theta] * R_\Theta^n / r^2 = -pR_t^n, r = R^n(\Theta,t),$$
$$\frac{1}{r^2}[\lambda(\text{T})\text{T}_\Theta]_n - [\lambda(\text{T})\text{T}_r]_n * \Theta_r^n = -p\Theta_t^n, \Theta = \Theta^n(r,t), [\text{T}]_n = 0;$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_r]_* - [\lambda(\text{T})\text{T}_\Theta]_* * R_\Theta^* / r^2 = -pR_t^*, r = R^*(\Theta,t),$$
$$[\lambda(\text{T})\text{T}_\Theta]_* / r^2 - [\lambda(\text{T})\text{T}_r] * \Theta_r^* = -p\Theta_t^*, \Theta = \Theta(r,t), [\text{T}]_* = 0,$$
$$\text{T}_r - \text{T}_\Theta * R_\Theta^{\text{В}} / r^2 = 0, r = R^{\text{В}}(\Theta,t), \text{T}_\Theta / r^2 - \text{T}_r\Theta_r^{\text{В}} = 0, \Theta = \Theta^{\text{В}}(r,t).$$

Отметим, что поставленные задачи Стефана не содержат начальных условий, так как температурное поле определяется только в возмущенной в тепловом отношении области биологической ткани $\Omega(t)$, вырождающейся при $t=0, mes\Omega(0)=0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}=0, r=0, z>0, t>0,\\
&\lim\left(\mathrm{T},\overline{\mathrm{T}}\right)=0, t>0\\
&\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_z\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_z * z_r^* = -pz_t^*, z=Z^*(r,t), t>0,\\
&\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_z\right]_* * R_z^* = -pR_t^*, r=R^*(z,t), t>0,
\end{aligned}$$

где $\alpha(\mathrm{T})=\alpha_{\mathrm{A}}+(\alpha-\alpha_{\mathrm{A}})\eta(r-a), \mathrm{T}_c(r)=\mathrm{T}_{\mathrm{A}}+\left(\overline{\mathrm{T}}-\mathrm{T}_{\mathrm{A}}\right)\eta(r-a).$

В случае полусферической охлаждающейся поверхности криозонда приходим к следующей двухфазной задаче Стефана [4; 5]:

$$\begin{aligned}
&\Phi^*(r,\Theta,t)=r-R^*(\Theta,t)=\Theta-\Theta^*(r,t)=0, r>r_0, 0<\Theta<\pi/2:\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\Theta}\right)-\frac{1}{\underline{a}^2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}=0, \Phi^*(r,\Theta,t)<0, t>0,\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\Theta}\right)-\frac{1}{\overline{a}^2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}=-\frac{1}{\overline{\lambda}}w(\mathrm{T}), \Phi^*(r,\Theta,t)>0, t>0,\\
&\mathrm{T}(r,\Theta,0)=\overline{\mathrm{T}}, r>r_0, 0<\Theta<\pi/2;\\
&\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}-\alpha_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_{\mathrm{A}})=0, r=r_0, 0<\Theta<\pi/2, t>0,\\
&\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}+\alpha_0\left(\mathrm{T}-\overline{\mathrm{T}}\right)=0, \Theta=\pi/2, r>r_0, t>0,\\
&\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\Theta}=0, \Theta=0, r>r_0; \lim\left(\mathrm{T}-\overline{\mathrm{T}}\right)=0, t>0,\\
&\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_\Theta\right]_* * R_\Theta^* = -pR_t^*, r=R^*(\Theta,t), t>0,\\
&\frac{1}{r^2}\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_\Theta\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* * \Theta_r^* = -p\Theta_t^*, \Theta=\Theta^*(0,t), t>0, [\mathrm{T}]_*=0.
\end{aligned}$$

Дальнейшее упрощение задач связано с переходом от неограниченных областей $z>0\left(r>r_0, 0<\Theta<\pi/2\right)$ к квадрату $0<r, z<d$ и сектору $r_0<r<a, 0<\Theta<\pi/2$.

С определенной погрешностью условия регулярности на бесконечности при достаточно больших значениях d и a можно заменить краевыми условиями Дирихле

$$\mathrm{T}(d,z,t)=\overline{\mathrm{T}}, \overline{\mathrm{T}}(r,d,t)=\overline{\mathrm{T}}; \mathrm{T}(a,\Theta,t)=\overline{\mathrm{T}}$$

или Неймана

$$\partial\mathrm{T}/\partial r=0, r=d, \partial\mathrm{T}/\partial z=0, z=d; \partial\mathrm{T}/\partial r=0, r=a.$$

Последнее, очевидно, равно нулю в случае пространственно локализованных задач Стефана, если зоны теплового возмущения превосходят максимальный размер установившейся стационарной зоны теплового возмущения биологической ткани, вне которой температурное поле постоянно $\mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}} = 36.7°C$.

2. Стационарные задачи осесимметричной криодеструкции биоткани

При заданной монотонно понижающейся до некоторого предельного значения температуре аппликатора $\mathrm{T_A}(t) \to \mathrm{T_A} < \mathrm{T}_n, \mathrm{T_A}(t) \le 0$ максимальные размеры зон криопоражения, замораживания и теплового возмущения достигаются в стационарном состоянии, когда $\mathrm{T}(p,t) = \mathrm{T}(p)$ и $\Phi^*(p,t) = \Phi^*(p)$. Для определения пары функций $\mathrm{T}(p)$ и $\Phi^*(p)$ получаем соответствующие стационарные задачи Стефана [6]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial z^2} = \frac{1}{\overline{\lambda}} w(\mathrm{T})\eta\left(\mathrm{T} - \mathrm{T}^*\right), 0 < r, z < d,$$
$$\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} - \alpha(r)\left[\mathrm{T} - \mathrm{T}_0(r)\right] = 0, z = 0, 0 < r < d, \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} = 0, r = 0, 0 < z < d,$$
$$\mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}}, z = d, 0 < r < d; \mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}}, r = d, 0 < z < d;$$
$$\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_z\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* * z_r^* = 0, z = Z^*(r), 0 < r < d,$$
$$\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_z\right]_* * R_z^* = 0, r = R^*(z), 0 < z < d; [\mathrm{T}]_* = 0,$$

в случае кругового аппликатора и

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \Theta}\right) = -\frac{w(\mathrm{T})}{\overline{\lambda}}\eta\left(\mathrm{T} - \mathrm{T}^*\right), r_0 < r < a, 0 < \Theta < \pi/2,$$
$$\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} - \alpha_\mathrm{A}\left(\mathrm{T} - \mathrm{T_A}\right) = 0, r = r_0, 0 < \Theta < \pi/2,$$
$$\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{r\partial \Theta} + \alpha_0\left(\mathrm{T} - \overline{\mathrm{T}}\right) = 0, \Theta = \pi/2, r_0 < r < a,$$
$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \Theta} = 0, \Theta = 0, r_0 < r < a; \mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}}, r = a, 0 < \Theta < \pi/2;$$
$$\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* - \frac{1}{r^2}\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_\Theta\right]_* * R_\Theta^* = 0, r = R\ (\Theta), 0 < \Theta < \pi/2,$$
$$\left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_\Theta\right]_* * r^2 - \left[\lambda(\mathrm{T})\mathrm{T}_r\right]_* * \Theta_r^* = 0, \Theta = \Theta^*(r), r_0 < r < a; [\mathrm{T}]_* = 0,$$

в случае полусферического аппликатора. При $d = a = \infty$ приходим к постановкам задач Стефана для полуограниченных сред $z > 0$ и $r > r_0$, $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$.

Список литературы

1. Березовский А.А. Одномерные математические модели криодеструкции биологической ткани // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1987. - С. 37-49.

2. Березовский А.А. Двумерные модели криодеструкции биоткани // Мат. моделирование физических процессов : сб. научных трудов. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989. - С. 14-38.
3. Березовский А.А., Кудаева Ф.Х. Канонический вид задач со свободными границами в проблемах гипотермии и криодеструкции биоткани // Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений. - Киев : Институт математики АИ Украины, 1992. - С. 19-21.
4. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., Мамбетов М.Ж. Интегральные уравнения задачи гипотермии. Инновационные технологии в системе высшего образования : сб. материалов II Международной научно-практической конференции (Махачкала, 2014 г.). - С. 110-114.
5. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., Мамбетов М.Ж. Двумерная плоско-параллельная задача криохирургии // European Applied Sciences. - 2014. - № 10. - С. 28-30.
6. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Двумерные задачи со свободными границами в медицине // Южно-Сибирский научный вестник. - 2014. - № 3 (7). - С. 16-18.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М.Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН «Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН», г. Нальчик;

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор Высокогорного геофизического института, г. Нальчик.