УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

Нахушева Ф.М.[1], Кудаева Ф.Х.[1], Кайгермазов А.А.[1], Кармоков М.М.[1]

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка связана с тем, что многие проблемы теории фильтрации жидкости во фрактальной среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин приводят к дифференциальным уравнениям дробного порядка. Дробные производные применяются при описании физических процессов стохастического переноса, изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. Задачи, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. В предыдущей работе построена локально-одномерная схема для многомерного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью. Рассмотрен случай многомерной задачи и построена локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка, когда на границах области по каждому направлению помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение диффузии, производная дробного порядка, сосредоточенная теплоемкость, разностная схема, устойчивость разностной схемы, априорная оценка

DIFFERENCE SCHEMES FOR THE FRACTIONAL ORDER DIFFUSION EQUATION WITH A CONCENTRATED HEAT CAPACITY

Nakhusheva F.M.[1], Kudaeva F.H.[1], Kaygermazov A.A.[1], Karmokov A.A.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov", Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

The need to study boundary value problems for differential equations of fractional order is related to the fact that many of the problems of the theory of fluid flow in fractal media, liquid filtration in fractured media with fractal geometry cracks lead to differential equations of fractional order. Fractional derivatives are used in the description of the physical processes of the stochastic transport, study of deformation and strength properties of polymeric materials. Tasks when placed on the boundary of concentrated heat capacity of a certain value. In a previous paper a locally one-dimensional scheme for the multidimensional heat equation with a concentrated heat capacity. The case of a multidimensional problem and built locally one-dimensional scheme for a diffusion equation of fractional order, when the boundaries of the area in each direction placed concentrated heat capacity of a certain value.

Keywords: boundary value problem, diffusion equation, fractional order derivative of concentrated heat capacity, difference scheme, stability of the difference schemes, a priori estimate

Необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка связана с тем, что многие проблемы теории фильтрации жидкости во фрактальной среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин приводят к дифференциальным уравнениям дробного порядка. Дробные производные применяются при описании физических процессов стохастического переноса, изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. Численным методам решения уравнения диффузии дробного порядка в многомерных областях посвящены работы [3, 8]. Задачи, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины, рассмотрены в [4]. В работе [7] построена локально-одномерная схема для многомерного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью. В [2] рассмотрен случай многомерной задачи и построена локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка, когда на границах области по каждому направлению помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УСТОЙЧИВОСТЬ

В области $Q_T=\{(x,t):0<x<l, \quad 0<t\le T\}$ рассматривается краевая задача для обобщенного уравнения диффузии с сосредоточенной теплоемкостью вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x,t)u+f(x,t), \quad 0<x<l, 0<t\le T, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\chi_1\dfrac{\partial u}{\partial t}+\beta_1(t)u-\mu_1(t), x=0, \\ -k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\chi_2\dfrac{\partial u}{\partial t}+\beta_2(t)u-\mu_2(t), x=l, \end{cases} \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\ge 0, \qquad (3)$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям $0<c_0\le k(x,t)\le c_1$; $q(x,t)\ge m>0$; $\beta_1,\beta_2\ge\beta_*>0$; $\chi_1,\chi_2\ge 0$; $\chi_1+\chi_2>0$, $\partial_{0t}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$ – регуляризованная производная дробного порядка α, $0<\alpha<1$ [6].

Для доказательства устойчивости решения задачи (1)-(3) будем пользоваться методом энергетических неравенств. После умножения уравнения (1) скалярно на $u(x,t)$ получаем энергетическое тождество:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha},u\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right),u\right)-\left(q(x,t)u,u\right)+\left(f(x,t),u\right), \qquad (4)$$

где $(u,\upsilon)=\int_0^l u\,\upsilon\,dx$, норма $\|u\|_0^2=(u,u)=\int_0^l u^2dx$.

Для второго скалярного произведения в правой части (4), интегрируя по частям с учетом краевых условий (2), будем иметь:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right),u\right)=$$

$$=k(l,t)\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)u(l,t)-k(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)u(0,t)-\int_0^l k(x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx$$

$$=-\chi_2\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}u(l,t)-\beta_2(t)u(l,t)u(l,t)+\mu_2(t)u(l,t)-$$

$$-\chi_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} u(0,t) - \beta_1(t) u(0,t) u(0,t) + \mu_1(t) u(0,t) - \int_0^l k(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (5)$$

Используя лемму 1 ([1], стр. 152) и учитывая условия на коэффициенты $0 < c_0 \le k(x,t) \le c_1$ и $\beta_1, \beta_2 \ge \beta_* > 0$, из (5) получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) \le -\frac{\chi_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(l,t)\right) - \frac{\chi_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(0,t)\right) -$$

$$-\left(2\beta_*\varepsilon - \varepsilon + c_1\right)\|u_x\|_0^2 - \left(2\beta_* c_\varepsilon - c_\varepsilon\right)\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu_1^2(t) + \frac{1}{2}\mu_2^2(t).$$

Для третьего интеграла в энергетическом тождестве (4) с учетом условия $q(x,t) \ge m > 0$ запишем:

$$\left(qu, u\right) \le m\int_0^l u^2(x,t)dx = m\|u\|_0^2.$$

Последнее скалярное произведение в тождестве (4) оценим с помощью ε-неравенства. Для $\varepsilon = 1/2$ будем иметь:

$$\left(f(x,t), u\right) \le \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (4) имеем:

$$\int_0^l \partial_{0t}^\alpha u\, u\, dx \le -\frac{\chi_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(l,t)\right) - \frac{\chi_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(0,t)\right) -$$

$$-\frac{\chi_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2(0,t)\right) - \left(\varepsilon\left(2\beta_* - 1\right) + c_1\right)\|u_x\|_0^2 + \left(c_\varepsilon - 2\beta_*\varepsilon - m + \frac{1}{2}\right)\|u\|_0^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\|f(x,t)\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu_1^2(t) + \frac{1}{2}\mu_2^2(t). \qquad (6)$$

Интегрируя (6) по τ от 0 до t, получаем:

$$\left(\frac{\chi_1}{2} + \frac{\chi_2}{2}\right)\varepsilon\|u_x(x,t)\|_0^2 + \left(\frac{\chi_1}{2} + \frac{\chi_2}{2}\right)c_\varepsilon\|u(x,t)\|_0^2 + \int_0^t\left(\int_0^l \partial_{0t}^\alpha u\, u\, dx\right)d\tau \le$$

$$\le \left(\varepsilon - 2\beta_*\varepsilon - c_1\right)\|u_x(x,t)\|_{2,Q_t}^2 + \left(c_\varepsilon - 2\beta_*\varepsilon - m + \frac{1}{2}\right)\|u(x,t)\|_{2,Q_t}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\|f(x,t)\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^t\left(\mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\right)d\tau + \frac{\chi_1}{2}u_0^2(0) + \frac{\chi_2}{2}u_0^2(l).$$

Пренебрегая положительным интегралом, получаем неравенство:

$$\frac{c_\varepsilon(\chi_1+\chi_2)}{2}\|u(x,t)\|_0^2+\frac{(\chi_1+\chi_2)\varepsilon}{2}\|u_x(x,t)\|_0^2\le$$

$$\le(\varepsilon-2\beta_*\varepsilon-c_1)\|u_x(x,t)\|_{2,Q_t}^2+\left(c_\varepsilon-2\beta_*\varepsilon-m+\frac{1}{2}\right)\|u(x,t)\|_{2,Q_t}^2+$$

$$+\frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{2,Q_t}^2+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\right)d\tau+\frac{\chi_1}{2}u_0^2(0)+\chi_2u_0^2(l). \qquad (7)$$

Обозначим в последнем неравенстве $\frac{\nu}{2}=c_\varepsilon-2\beta_*\varepsilon-m+1/2$ и потребуем, чтобы $\varepsilon-2\beta_*\varepsilon-c_1\ge 1/2$. Будем иметь:

$$\|u(x,t)\|_0^2+\|u_x(x,t)\|_0^2\le$$

$$\le M_1\left(\int_0^t\|u(x,\tau)\|_0^2+\|u_x(x,\tau)\|_0^2d\tau\right)+\|f(x,t)\|_{2,Q_t}^2+$$

$$+\int_0^t\left(\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\right)d\tau+\chi_1u_0^2(0)+\chi_2u_0^2(l). \qquad (8)$$

Применяя лемму 1 для нестационарных задач ([1], стр. 152), из последнего получим:

$$\|u(x,t)\|_0^2+\|u_x(x,t)\|_0^2\le$$

$$\le M(t)\left(\|u_0(x)\|_0^2+\|f(x,t)\|_{2,Q_t}^2\right)+\int_0^t\left(\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\right)d\tau, \qquad (9)$$

где $M(t)$ – положительная величина, зависящая от коэффициентов уравнения и размеров области Q_T. Из априорной оценки (9) следует устойчивость решения задачи (1)-(3) по входным данным задачи, а также его единственность.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В замкнутой области $\overline{Q_T}=\{(x,t):0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ строится сетка $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau=\{(x_i,t_j)=(ih,j\tau),\ i=0,1,\dots,N;\ j=0,1,\dots,j_0\}$, где $h=l/N$ – шаг сетки $\overline{\omega}_h$ по переменной x, $\tau=T/j_0$ – шаг сетки $\overline{\omega}_\tau$ по переменной t, $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,\dots,N\}$, $\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\dots,j_0\}$; N – число разбиений по переменной x; j_0 – число разбиений по переменной t.

Для задачи (1)-(3) построена разностная схема:

$$\Delta_{0t}^{\alpha} y = \Lambda y + \varphi, \qquad (10)$$

$$\Delta_{0t}^{\alpha} y_0 = \frac{a_1 y_{\bar{x},1} - \chi_1 y_{t,0} - (0.5hd_0 + \beta_1) y_0}{0.5h} + \tilde{\mu}_1, \quad i = 0, \qquad (11)$$

$$\Delta_{0t}^{\alpha} y_N = -\frac{a_N y_{\bar{x},N} + \chi_2 y_{t,N} + (0.5hd_N + \beta_2) y_N}{0.5h} + \tilde{\mu}_2, \quad i = N, \qquad (12)$$

$$y(x,0) = u_0(x), \; x = x_i, \; i = 0,1,...,N. \qquad (13)$$

Здесь $\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x - dy = \frac{1}{h^2}\left(a_{i+1}\left(y_{i+1}^j - y_i^j\right) - a_i\left(y_i^j - y_{i-1}^j\right)\right) - d_i y_i$, $a_1 y_{\bar{x},1} = a_1 \frac{y_1 - y_0}{h}$,

$a_N y_{\bar{x},N} = a_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$, $\quad y_{t,0} = \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau}$, $\quad y_{t,N} = \frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau}$, $\quad \tilde{\mu}_1 = \frac{\bar{\mu}_1}{0.5h}$,

$\bar{\mu}_1 = 0.5hf_0 + \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \frac{\bar{\mu}_2}{0.5h}$, $\bar{\mu}_2 = 0.5hf_N + \mu_2$,

$\Delta_{0t}^{\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) y_t^s$ – разностный аналог дробной производной $\partial_{0t}^{\alpha} u$, и в классе достаточно гладких функций справедливо равенство $\partial_{0t}^{\alpha} u = \Delta_{0t}^{\alpha} u + O(\tau)$ [9].

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Для доказательства устойчивости разностной схемы (10)-(13) используем принцип максимума. Для этого схему приводим к каноническому виду [5]:

$$A(P) y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) y(Q) + F(P), \quad P \in \omega, \qquad (14)$$

где ω – связная сетка; $Ш'(P)$ – окрестность узла P, не содержащая самого узла P. Для коэффициентов (14) должны выполняться условия:

$$\begin{gathered} A(P) > 0, \; B(P,Q) > 0 \;\; для\, всех \; P,Q \in \omega, \\ D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geq 0, \; P \in \omega. \end{gathered} \qquad (15)$$

Расписав (10) в индексной форме с учетом $(t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha})/\tau = 1/\tau^{\alpha}$, $(t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha})/\tau = (2^{1-\alpha} - 1)/\tau^{\alpha}$ в точке $P = P(x_i, t_{j+1})$ получим:

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} + \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i\right) y_{i+1}^{j+1} = \frac{a_{i+1}}{h^2} y_{i+1}^{j+1} + \frac{a_i}{h^2} y_{i-1}^{j+1} + \frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} y_i^j +$$

$$+ \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} y_i^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) y_t^s + \varphi_i^j. \qquad (16)$$

Сравнивая (16) с (14), видим:

$$A(P)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{a_i+a_{i+1}}{h^2}+d_i, \qquad B(P,Q)=\frac{a_{i+1}}{h^2}+\frac{a_i}{h^2},$$

$$D\left(P\left(x_i,t_{j+1}\right)\right)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+d_i .$$

Так как по условию $d_i\ge m>0$, то

$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)>0. \qquad (17)$$

Здесь $F(P)=\varphi_i^j$.

В точке $P=P(x_0,t_{j+1})$, расписывая (11) в индексной форме, будем иметь:

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{a_1}{0.5h^2}-\frac{\chi_1}{0.5h\tau}+d_0+\frac{\beta_1}{0.5h}\right)y_0^{j+1}=$$

$$=\frac{a_1}{0.5h^2}y_1^{j+1}+\left(\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{\chi_1}{0.5h\tau}\right)y_0^j+\frac{2^{1-\alpha}-1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}y_0^{j-1}-$$

$$-\sum_{s=0}^{j-2}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\frac{y_0^{s+1}-y_0^s}{\tau}+\tilde{\mu}_1 . \qquad (18)$$

Ввиду условий $d_i\ge m>0,\beta_1\ge\beta_*>0,\ \chi_1\ge 0$ имеем:

$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P(x_0,t_{j+1}))>0. \qquad (19)$$

Аналогично, в точке $P=P(x_N,t_{j+1})$ для граничного условия (12) имеем:

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{a_N}{0.5h^2}-\frac{\chi_2}{0.5h\tau}-d_N-\frac{\beta_2}{0.5h}\right)y_N^{j+1}=$$

$$=\frac{a_Ò}{0.5h^2}y_{N-1}^{j+1}+\left(\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}+\frac{\chi_2}{0.5h\tau}\right)y_N^j+\frac{2^{1-\alpha}-1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}y_N^{j-1}-$$

$$-\sum_{s=0}^{j-2}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\frac{y_N^{s+1}-y_N^s}{\tau}+\tilde{\mu}_2 . \qquad (20)$$

С учетом условий $d_N\ge m>0,\beta_2\ge\beta_*>0,\ \chi_2\ge 0$ имеем:

$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P(x_N,t_{j+1}))>0. \qquad (21)$$

Из неравенств (17), (19), (21) на основании теоремы 3 [5] для задачи (10)-(13) верна оценка:

$$\|y\|_C \le \left\|\frac{F(P)}{D(P)}\right\|_C \quad , \qquad (22)$$

из которой следует устойчивость решения разностной схемы (10)-(13).

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, – 1973.
2. Нахушева Ф.М., Водахова В.А., Кудаева Ф.Х., Абаева З.В. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // Современные проблемы науки и образования, М.: Издание РАЕ. – 2015. – № 2.
3. Нахушева Ф.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Об устойчивости локально-одномерной схемы для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 1997. –Т. 1. – № 2. – С. 23.
4. Самарский А.А. Об одной задаче распространения тепла // Избранные труды А.А. Самарского. – М.: МАКС Пресс, –2003. –С. 1–22.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, –1973.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, –1997.
7. Шхануков-Лафишев М.Х., Нахушева Ф.М., Лафишева М.М., Мамбетова М.М. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью // Владикавказский математический журнал, Владикавказ. –2013. –Т. 15. – Вып. 4. –С. 59–65.
8. Шхануков-Лафишев М.Х., Нахушева Ф.М. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка в p-мерном параллелепипеде // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 1999. – № 2. – С. 35.
9. Шхануков М.Х. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной. // Докл. РАН. – 1996. –Т. 348, — С. 746–748.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М. Х., д.ф.-м.н., профессор ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик;

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор Высокогорного Геофизического Института, г. Нальчик.