УДК 519.6

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абрегов М.Х.[1], Беканов А.М.[1], Канчукоев В.З.[1]

[1] ФГБОУ ВПО *«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия (360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Исследование на разрешимость неклассических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и разработка численных методов их решения приводит к необходимости получения оценок решений локальных краевых задач для этих уравнений. Аналогичная проблема возникает при решении краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в дифференциальной и конечно-разностной постановках. Данная работа посвящена исследованию третьей краевой задачи для оператора Штурма-Лиувилля. При определенных условиях на входные данные задачи получена поточечная оценка решения. В работе также получена априорная оценка решения задачи в равномерной метрике, которая усиливает известную равномерную оценку. Результаты работы получены с использованием представления решения задачи с помощью функции Грина и известных дифференциальных неравенств, в частности, теоремы сравнения Штурма.

Ключевые слова: краевая задача третьего рода для оператора Штурма-Лиувилля, теорема сравнения Штурма, поточечная оценка решения, равномерная оценка.

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

Abregov M.H.[1], Bekanov A.M.[1], Kanchukoev V.Z.[1]

[1] *"Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov "Nalchik, Russia (360004, Nalchik, Street Chernyshevskogo 173), e-mail: bsk@kbsu.ru*

Study on the solvability nonclassical boundary value problems for ordinary differential equations of the second order and the development of numerical methods for solving them makes it necessary to obtain estimates of solutions of local boundary value problems for these equations. A similar problem arises in the solution of boundary value problems for loaded differential equations in differential and finite-difference formulations. This work is devoted to the third boundary value problem for the Sturm-Liouville. Under certain conditions, the input data of the problem is obtained pointwise estimate of the solution. The paper also received a priori estimate of the solution of the problem in the uniform metric, which enhances the well-known uniform estimate. The results obtained using the representation of the solution of the problem with the help of Green's functions and known differential inequalities, in particular, comparison theorem Sturm.

Keywords: boundary value problem of the third kind for the Sturm-Liouville theorem Sturm comparison, pointwise estimate of the solution, the uniform estimate.

Исследование на разрешимость неклассических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и разработка численных методов их решения приводит к необходимости получения оценок решений локальных краевых задач для этих уравнений.

Аналогичная проблема возникает при решении краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в дифференциальной и конечно-разностной постановках.

В настоящей работе исследуется поведение решения краевой задачи третьего рода

$$(k(x)u')' - g(x)u = -f(x), \quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$-k(0)u'(0) + b_1 u(0) = 0 \tag{2}$$

$$k(1)u'(1) + b_2 u(1) = 0, \tag{3}$$

где $k(x) \in C^1[0,1]$, $\quad g(x), f(x) \in C[0,1]$,

$0 < c_1 \le k(x) \le c_2$, $\quad 0 < g_0 \le g(x) \le \bar{g}$ всюду на [0.1] , а b_1 и b_2 положительные числа. Как известно [3,4], задача (1)-(3) однозначно разрешима в классе функции $\mathrm{C}^2[0,1]$, при этом имеет место априорная оценка

$$\|u\|_c \le \frac{1}{g_0} \cdot \|f\|_c \quad . \tag{4}$$

В данной работе будет получена поточечная оценка решения задачи (1)-(3), а также априорная оценка, усиливающая (4).

Приведем необходимые сведения для решения поставленной задачи.

Рассмотрим два уравнения:

$$(p_1(x)u')' + q_1(x)u = 0, \tag{5}$$

$$(p_2(x)u')' + q_2(x)u = 0, \tag{6}$$

где функции $p_i(x)$ и $q_i(x), i = 1,2$ вещественны и непрерывны на интервале J и

$$p_1(x) \ge p_2(x) > 0, q_1(x) \le q_2(x). \tag{7}$$

При этих условиях уравнение (6) называется мажорантой Штурма [5] для уравнения (5) на J.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнений (5) и (6) непрерывны на* $(x_0, l\,]$, *и пусть уравнение (6) является мажорантой Штурма (5). Предположим, что* $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *являются решениями уравнений (5) и (6) соответственно, всюду на отрезке* $[\,x_0, l\,]$ *удовлетворяет соотношениям:*

$$u_1(x)u_1'(x) > 0, \qquad u_2(x)u_2'(x) > 0,$$

и в точке $x = x_0$ *выполнено неравенство*

$$\frac{p_1(x)u_1'(x_0)}{u_1(x_0)} \ge \frac{p_2(x_0)u_2'(x_0)}{u_2(x_0)} > 0$$

Тогда

$$\frac{u_1(x)}{u_1(l)} \le [\frac{u_2(x)}{u_2(l)}]^{\frac{m_2}{M_1}}, \quad x_0 < x \le 1. \tag{8}$$

Доказательство теоремы приводится в [1].

Для получения оценки (5) будем пользоваться [4] представлением решения задачи (1)-(3) в виде

$$u(\xi) = \int_0^l G(x,\xi) f(x) dx, \quad . \tag{9}$$

где $G(x, \xi)$ – функция Грина третьей краевой задачи.

Функция $G(x, \xi)$ определяется по формуле

$$G(x,\xi)=\frac{1}{C}\begin{cases} q(\xi)r(x), & 0\le x\le\xi, \\ r(\xi)q(x), & \xi\le x\le 1, \end{cases} \tag{10}$$

где *r(x)*, *q(x)*- решения задач

$$(k(x)r')' - g(x)r = 0, \qquad 0<x<1, \tag{11}$$
$$-k(0)r'(0) + b_1 r(0) = 0, \quad k(1)r'(1) + b_2 r(1) = 1,$$

$$(k(x)q')' - g(x)q = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{12}$$
$$-k(0)q'(0) + b_1 q(0) = 1, \qquad -k(1)q'(1) + b_2 q(1) = 0,$$

а постоянная C в (9) определяется по формуле

$$C = k(\xi)\Delta(r(\xi), q(\xi)).$$

Введем обозначение $\lambda = \sqrt{\frac{\bar{g}}{c_2}}$ и изучим свойства решений задач (11) и (12). ***Лемма.1*** *Пусть* $k(x) \in C^1[0,1], f(x), g(x) \in C[0,1], 0 < g^0 \le g(x) \le \bar{g}$.

Тогда решение задачи (11) будет положительной, строго возрастающей на [0,1] функцией. При этом для всех $x \in [0,1]$ *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{b_1+b_2+\bar{g}}\left[\frac{\lambda k(0)ch(\lambda x)+b_1 sh(\lambda x)}{\lambda k(0)ch(\lambda)+b_1\, sh(\lambda)}\right]^{\frac{c_2}{c_1}} < r(x) \tag{13}$$

Для доказательства неравенства (13) применим теорему 1, приняв в неравенстве (8) в качестве $u_2(x)$ решение $r(x)$ задачи (11), а в качестве $u_1(x)$- решение $y(x)$ задачи

$$(c_2 y'(x))' - \bar{g}y = 0, 0 < x < 1, \tag{14}$$
$$y(0) = r(0), y'(0) = r'(0).$$

В силу неравенств $c_2 \ge k(x)$, $-\bar{g} \le -g(x)$, уравнение (11) является мажорантой Штурма уравнения (14). Единственным решением задачи (14) является функция

$$y(x) = r(0)ch(\lambda x) + \frac{r'(0)}{\lambda}sh(\lambda x),$$

которую, используя левое краевое условие (11), перепишем в виде

$$y(x) = r(0)\left[ch(\lambda x) + \frac{b_1}{k(0)}sh(\lambda x)\right]. \tag{15}$$

Поскольку числа $\lambda, r(0), r'(0), k(0), b_1$ положительны, то нетрудно показать, что $y(x)$ будет положительной, строго возрастающей на [0,1] функцией. Очевидно, что

$$0 \le \frac{y(0)}{c_2 y'(0)} \le \frac{r(0)}{k(0)r'(0)}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Подставляя в (8) функции $r(x)$ и $y(x)$ вместо $u_1(x)$ и $u_2(x)$, и учитывая, что в данном случае

$$m_2 = \min k(x) = c_1; M_1 = max c_2 = c_2,$$

приходим к неравенству

$$r(1)\left[\frac{y(x)}{y(1)}\right]^{\frac{c_2}{c_1}} \leq r(x)\ . \qquad (16)$$

Оценим снизу $r(1)$. Используя краевые условия в (11), получаем:

$$b_1 r(0) + b_2 r(1) = 1 - \left(k(1)r'(1) - k(0)r'(0)\right),$$

откуда, с учетом равенства

$$k(1)r'(1) - k(0)r'(0) = \int_0^1 g(x)r(x)dx,$$

имеем

$$b_1 r(0) + b_2 r(1) = 1 - \int_0^1 g(x)r(x)dx.$$

Из цепочки неравенств

$$b_1 r(0) + b_2 r(1) \geq 1 - \int_0^1 g(x)r(x)dx \geq 1 - \bar{g}r(1)$$

следует, что

$$r(1) \geq \frac{1}{b_1 + b_2 + \bar{g}}. \qquad (17)$$

Пользуясь (15) и (17) из (16) получаем неравенство (13).

Лемма 2. *Пусть* $k(x) \in C^1[0,1], f(x), g(x) \in C[0,1], 0 < g^0 \leq g(x) \leq \bar{g}, 0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2$ *всюду на* $[0,1]$. *Тогда решение задачи (12) на отрезке [0,1] будет положительной, строго убывающей функцией. При этом имеет место неравенство*

$$\frac{1}{b_1 + b_2 + \bar{g}}\left[\frac{\lambda k(1) ch(\lambda(1-x)) + b_2 sh(\lambda(1-x))}{\lambda k(1) ch(\lambda) + b_2 sh(\lambda)}\right]^{\frac{c_2}{c_1}} < q(x)\ . \qquad (18)$$

Доказательство леммы 2 проводится по аналогии [2]с доказательством леммы 1.

Теорема 2. *Пусть k(x)*$\in C^1[0,1], f(x), g(x) \in C[0,1], 0 < g^0 \leq g(x) \leq \bar{g}$,

0<$c_1 \leq k(x) \leq c_2$ *всюду на [0,1]. Тогда для решения задачи (1)-(3) имеет место оценка*

$$|u(\xi)| \leq \frac{1}{g_0}\|f\|_c \left[1 - \frac{b_2}{b_1 + b_2 + \bar{g}}\left(\frac{c_1 ch(\lambda\xi) + b_1\, sh(\lambda\xi)}{c_1 ch(\lambda) + b_1\, sh(\lambda)}\right)^{\frac{c_2}{c_1}}\right.$$

$$\left. - \frac{b_1}{b_1 + b_2 + \bar{g}}\left(\frac{c_1 ch(\lambda(1-\xi)) + b_2\, sh(\lambda(1-\xi))}{c_1 ch(\lambda) + b_2 sh(\lambda)}\right)^{\frac{c_2}{c_1}}\right] \qquad (19).$$

Для доказательства теоремы воспользуемся представлением (9) решения задачи (1)-(3) с помощью функции Грина:

$$u(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)f(x)dx=\frac{1}{C}\int_0^\xi r(x)q(\xi)f(x)dx+\frac{1}{C}\int_\xi^1 r(\xi)q(x)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{C}\left[g(\xi)\int_0^\xi r(x)f(x)dx+r(\xi)\int_\xi^1 q(x)f(x)dx\right], \qquad (20)$$

где $r(x)$ и $q(x)$- решения задач (11) и (12).

Заметим, что:

а) $\int_0^\xi r(x)dx \le \frac{1}{g_0}\int_0^\xi g(x)r(x)dx = \frac{1}{g_0}\int_0^\xi \big(k(x)r'(x)\big)'dx = \frac{1}{g_0}\big(k(\xi)r'(\xi)-k(0)r'(0)\big);$ (21)

б) $\int_\xi^1 q(x)dx \le \frac{1}{g_0}\int_\xi^1 g(x)q(x)dx = \frac{1}{g_0}\int_\xi^1 \big(k(x)q'(x)\big)'dx = \frac{1}{g_0}(k(1)r'(1)-k(\xi)r'(\xi));$ (22)

Тогда

$|u(\xi)| \le \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{g_0}\cdot\|f\|_c\cdot[q(\xi)(k(\xi)r'(\xi)-k(0)r'(0))+r(\xi)(k(1)q'(1)-k(\xi)q(\xi))] = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{g_0}\cdot \|f\|_c\cdot[k(\xi)(q(\xi)r'(\xi)-r(\xi)q'(\xi))+r(\xi)(k(1)q'(1)-q(\xi)k(0)r'(0))] = \frac{1}{g_0}\cdot\|f\|_c\cdot(1+\frac{1}{C}(r(\xi)k(1)q'(1)-q(\xi)k(0)r'(0)).$ (23)

Воспользуемся краевыми условиями в (11) ,(12). Учитывая, что $\mathrm{C}=r(0)=q(1)$, из (23) получаем оценку:

$$|u(\xi)| \le \frac{1}{g_0}\|f\|_c(1-b_2q(\xi)-b_1r(\xi)) \ . \qquad (24)$$

Из оценок (24), (13) и (18) следует оценка решения в точке ξ:

$$|u(\xi)| \le \frac{1}{g_0}\|f\|_c\left[1-\frac{b_2}{b_1+b_2+\bar g}\left(\frac{c_1ch(\lambda\xi)+b_1\,sh(\lambda\xi)}{c_1ch(\lambda)+b_1\,sh(\lambda)}\right)^{\frac{c_2}{c_1}} -\frac{b_1}{b_1+b_2+\bar g}\left(\frac{c_1ch\big(\lambda(1-\xi)\big)+b_2\,sh\big(\lambda(1-\xi)\big)}{c_1ch(\lambda)+b_2sh(\lambda)}\right)^{\frac{c_2}{c_1}}\right].$$

С учетом свойств функций $r(x), q(x)$, из последнего получаем априорную оценку решения:

$$\|u\|_c \le \frac{1}{g_0}\|f\|_c\left[1-\frac{b_2}{b_1+b_2+\bar g}\left(\frac{c_1}{c_1ch(\lambda)+b_1\,sh(\lambda)}\right)^{\frac{c_2}{c_1}}-\frac{b_1}{b_1+b_2+\bar g}\left(\frac{c_1}{c_1ch(\lambda)+b_2sh(\lambda)}\right)^{\frac{c_2}{c_1}}\right].$$

Список литературы

1. Абрегов М.Х. «Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений и некоторые их приложения». Дис. На соискание ученой степени к.ф.-м.н., Нальчик, 1998.

2. Абрегов М.Х. Об оценке решений краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля. Вестник КБГУ, серия математические науки, выпуск 2, Нальчик, 1998.
3. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. - М.: Наука, 1976.
4. Тихонов А.Н., Васильева А,Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.- М: Наука, 1980.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения М., Наука, 1980.

Рецензенты:

Шхануков-Лафишев М.Х., д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик;

Ашабоков Б.А., д.ф.-м.н., профессор Высокогорного геофизического института, г. Нальчик.